

Vektorový integrální počet

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left|\right| #1 \right|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\set#1{\left\{ #1
\right\}} \xdef\brackets#1{\left( #1 \right)} \xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}}
\xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}}
\xdef\mc#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}}
\xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi}
\xdef\Tagged#1{(\text{#1})} \xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2#eq-
#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef>tagEq#1{\href{#eq-#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDe#1{\href{#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}}
\xdef\conv#1{\mathrm{conv}\,, #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\,, #1}
\xdef\aff#1{\mathrm{aff}\,, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\,, #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\,,
#1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\,, #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1}
\xdef\interior#1{\mathrm{int}\,, #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\,, #1}
\xdef\grad#1{\mathrm{grad}\,, #1} \xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1}
\xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1} \xdef\hess#1{\nabla^2\,, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x
#1} \xdef\jacobx#1{D_x #1} \xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1}
\xdef\co#1{\mathrm{co}\,, #1} \xdef\iter#1{\wedge^{#1}} \xdef\str{\wedge} \xdef\spv{\mc V}
\xdef\civ{\mc U} \xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv x} \xdef\yy{\vv y}
\xdef\partDiff#1{\frac{\partial}{\partial #1}} \xdef\partDeriv#1#2{\frac{\partial #1}{\partial
#2}} \xdef\NPartDeriv#1#2#3{\frac{\partial^{#1} #2}{\partial #3}}
\xdef\Div#1{\mathrm{div}\,, #1} \xdef\rot#1{\mathrm{rot}\,, #1} \xdef\d{\,, \mathrm{d}} $$
```

Základní pojmy

Připomeňme definici **jednoduchého oboru** \tilde{V} v \mathbb{R}^3 (Definice 23 v prezentacích), což je množina, která je **sjednocením jednoduchých oborů** vzhledem ke všem osám, přičemž jednoduchý obor V vzhledem k např. ose z definujeme jako $V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid [x, y] \in M, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$, kde $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je množina v **rovině**, která je omezená uzavřenou jednoduchou křivkou C .

“Jednoduchá křivka neprotíná sama sebe.

Definice ∇ (nabla operátor)

Hamiltonův *nabla operátor* definujeme v \mathbb{R}^2 jako $\nabla := (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$, z čehož dostáváme, že funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ přiřazuje vektorové pole $\nabla f = \text{grad } f$

$= \nabla_x f, \nabla_y f$. Obdobně bychom jej definovali pro \mathbb{R}^n .

“ Hamiltonův operátor ∇ aplikovaný na vektorové pole \mathbf{F} v bodě (x,y) si můžeme představit jako změny $\mathbf{F}(x,y)$ při malém posunutí (x,y) . Potom skalární součin vektorového pole s tímto operátorem pak dává v jistém smyslu "průměr" jak je změna vektorového pole rovnoběžná se zmíněným malým posunem. Naopak vektorový součin těchto dvou členů dává "průměrnou" míru kolmosti změny vektorového pole a malé změny zkoumaného bodu.

Pro lepší intuici doporučuji [toto video](#).

Uvedme jako poznámku, že operátor $\nabla^2 = \Delta$ se nazývá **Laplaceův operátor** a pro skalární funkci f má tvar $\Delta f = \nabla_x^2 f + \nabla_y^2 f$

“ Nabla operátor aplikovaný na vektorovou funkci $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (tj. vektorové pole) dává **Jakobiho matici** $\nabla \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}$

Definice $\nabla \cdot \mathbf{F}$ (divergence)

Nechť máme vektorovou funkci $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, kde funkce $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojitě diferencovatelné.

“ Tedy jsou spojitě spolu se svými prvními parciálními derivacemi

Pak s použitím definice $\nabla \cdot \mathbf{F}$ označíme **divergenci** vektorového pole jako funkci $\text{Div} \mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem $\text{Div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = P_x + Q_y$. Obdobně bychom divergenci definovali pro vektorové pole v \mathbb{R}^n .

Dále si uvědomme, že *divergence* uvádá "poměr" přítoku a odtoku vektorového pole v daném bodě. To jest, je-li $\text{Div} \mathbf{F}(x,y) > 0$, pak v bodě (x,y) více vektorové odtéká, než je do toho bodu přítok. Analogicky pro situaci $\text{Div} \mathbf{F}(x,y) < 0$.

V analogii s kapalinami by to byl bod, ze kterého kapalina více odtéká, než do něj přitéká - tj. v tomto bodě vzniká kapalina.

Má-li vektorové pole charakterizující nějakou kapalinu pozitivní divergenci, potom by se v něm skrvny (např. ropná skrvna v oceánu) zvětšovaly postupem času

Obdobně můžeme zapsat i **totální diferenciál** funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $df = \text{scal} \{ \nabla f \} \{ dx_1, \dots, dx_n \} = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$

Definice $\{ZD.3\}$ (zřídlovost)

Vektorové pole \mathbf{F} nazveme **nezřídlové**, pokud pro každý jeho bod (x,y) platí $\text{Div} \{ \mathbf{F} \}(x,y) = 0$. V opačném případě jej nazveme **zřídlové**.

Definice $\{ZD.4\}$ (rotace, curl)

Nechť máme vektorovou funkci $\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, kde funkce $P, Q, R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojitě diferencovatelné.

Pak s použitím definice $\{ZD.1\}$ označíme **rotaci** vektorové pole jako funkci $\text{rot} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ s předpisem $\text{rot} \{ \mathbf{F} \} = \nabla \times \mathbf{F} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$

Pro dvourozměrné vektorové pole $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ pak uvažujeme rotaci jako $\text{rot} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ s 3. vstupní souřadnicí vždy nulovou a platí $\text{rot} \{ \mathbf{F} \} = (0, 0, Q_x - P_y)$

“ Zde je důležité si uvědomit, že ačkoliv pracujeme s 2D vektorovým polem, jeho rotace bude ležet ve 3. dimenzi, neboť musí být kolmá na jak na ∇ , tak i na vektorové pole \mathbf{F} .

Rotace $\text{rot} \{ \mathbf{F} \}(x,y)$ udává lokální míru rotace v bodě (x,y) a je-li nulová, pak takové pole nazveme **nevírové**.

“ Je-li rotace $\text{rot} \{ \mathbf{F} \} > 0$ vektorového pole \mathbf{F} , pak se tato rotace děje proti směru hodinových ručiček z pohledu kladně orientovaného normálního vektoru (osy z pro $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$).

Lemma $\{ZT.1\}$ (vlastnosti rotace a divergence)

Nechť máme funkci $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a vektorovou funkci $F(x) = (P_1(x), \dots, P_n(x))$, kde funkce $P_1, \dots, P_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojitě diferencovatelné. Pak platí

1. $\operatorname{rot}\{\operatorname{grad} f\} = \mathbf{0}$
2. $\operatorname{Div}\{\operatorname{rot}\{\mathbf{F}\}\} = 0$

Důkaz:

Důkaz provedeme pro každou část zvlášť. Pro první rovnost jistě platí $\operatorname{rot}\{\operatorname{grad} f\} = \nabla \times \operatorname{grad} f = \nabla \times \nabla f$, přičemž si zde můžeme uvědomit, že ∇f je *de facto* lineární násobek operátoru ∇ , tedy ∇ a ∇f jsou lineárně závislé. Z tohoto plyne, že jejich vektorový součin je nulový vektor. Více rigorózně tento důkaz provedeme v \mathbb{R}^3 následovně

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\{\operatorname{grad} f\} &= \nabla \times \operatorname{grad} f = \nabla \times \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

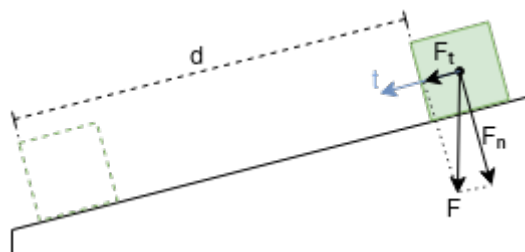
za předpokladu, že f je dostatečně hladká. V \mathbb{R}^n by se důkaz vedl obdobně.

Dokažme nyní druhou část tohoto lemmatu. Jistě $\operatorname{Div}\{\operatorname{rot}\{\mathbf{v}\}\} = \operatorname{scal}\{\nabla\}\{\operatorname{rot}\mathbf{v}\} = \operatorname{scal}\{\nabla\}\{\nabla \times \mathbf{v}\}$, ∇ chápeme-li nyní ∇ jako vektor, pak z definice vektorového součinu je $\nabla \times \mathbf{v} \perp \nabla \implies \operatorname{scal}\{\nabla\}\{\nabla \times \mathbf{v}\} = 0$. \blacksquare

Definice $\{ZD.5\}$ (křivkový integrál 2. druhu)

Uvažujme vektorové pole $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a křivku C charakterizovanou parametrizací $t \in [a, b]$, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Potom integrál
$$\int_C \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle = \int_C \langle \mathbf{F}, \mathbf{t} \rangle dt,$$
 kde $d\mathbf{x} = (dx, dy)$ a $\mathbf{t} = (\varphi', \psi')$, nazveme **křivkový integrál 2. druhu**.

Křivkovým integrálem 2. druhu v jakém si smyslu zobecňujeme koncept "práce" (z fyziky), přičemž standardně jsme zvyklí na vztah $W = F \cdot d$, kde d je délka trajektorie a F síla působící na těleso posunující ho po zmíněné trajektorii. Představit si můžeme například šikmou plochu, viz obrázek.



V této situaci gravitační pole působící silou \vec{F} vykoná práci pouze části síly F , která je tečná (v tomto případě rovnoběžná) ke směru pohybu. Tato tečná část je označena \vec{F}_t a jistě platí $\vec{F}_t = \text{scal}\{\vec{F}\} \cdot \vec{t}$ a taktéž $W = \int \vec{F}_t \cdot d\vec{r} = \int \text{scal}\{\vec{F}\} \cdot \vec{t} \cdot d\vec{r}$ To ovšem můžeme zapsat i pomocí křivkového integrálu 2. druhu, který udává

práci, kterou vykoná vektorové pole při posunu tělesa po trajektorii

$$W = \int_C \text{scalars} \{ \vec{F} \} \{ \vec{t} \} \, dt.$$

Definice $\S{D}{ZD.6}$ (plošný integrál 2. druhu)

Uvažujme vektorové pole $\vv{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a plochu S . Potom
$$\iint_S \text{scal} \{ \vv{F} \} \{ \vec{n} \} \, dS = \iint_S P(x,y,z) \, dy \, dz + Q(x,y,z) \, dx \, dz + R(x,y,z) \, dx \, dy,$$
 kde \vec{n} je normálový vektor plochy S , nazýváme **plošný integrál 2. druhu**.

Plošný integrál 2. druhu nám udává průtok (*flux*) vektorového pole \vv{F} skrze plochu S , který v každém bodě této plochy počítáme jako skalární součin normály \vec{n} k ploše S a vektorového pole \vv{F} (což nám dá, jak "velká část" \vv{F} směřuje ve směru normály \vec{n} a tedy protíká onou plochou S)

Důležité vlastnosti

Věta $\S{D}{VT.1}$ (Gaussova-Ostrogradského věta/Gauss divergence theorem)

Zformulujme tuto větu prvně slovně, poté i s podmínkami rigorózně:

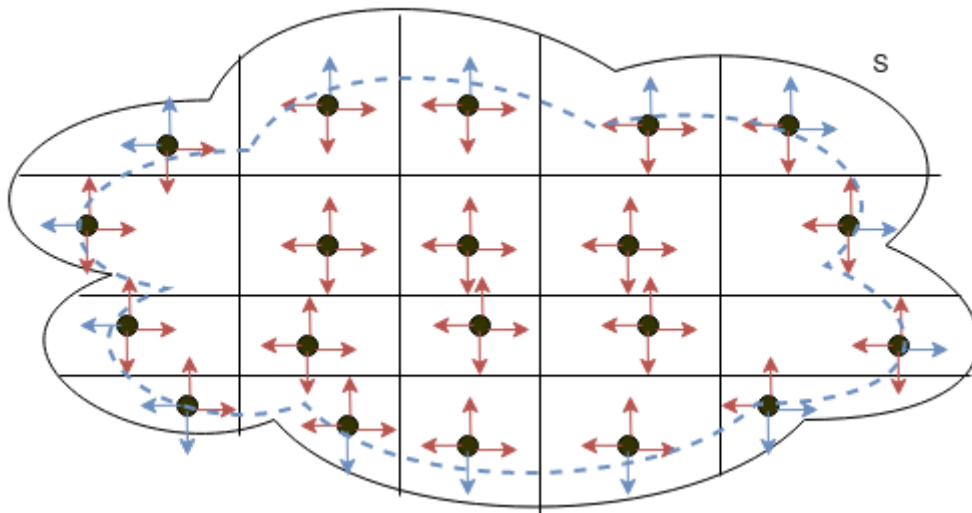
Průtok vektorového pole \vv{F} skrze ohraničenou plochu S je roven integrálu z divergence $\text{Div}\{\vv{F}\}$ přes celý objem V , který plocha S ohraničuje.

Nechť V je jednoduchý obor v \mathbb{R}^3 , $\vv{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je vektorové pole se spojitě diferencovatelnými složkami v každé proměnné a nechť S je ohraničená plocha ohraničující V orientovaná ve směru vnější normály. Pak platí
$$\iint_S \text{scal} \{ \vv{F} \} \{ \vec{n} \} \, dS = \iiint_V \text{Div} \{ \vv{F} \} \, dV$$

“ Zde si uvědomme, že

- je-li kapalina nestačitelná (samovolně nemizí/nevzniká, tedy $\text{Div}\{\vv{F}\} = 0$), potom stejná část "přiteče" do libovolné oblasti, jako z ní odteče
- stejně tak, točí-li se kapalina (vektorové pole \vv{F}) pouze v rámci této oblasti (tedy $\text{Div}\{\vv{F}\}$ je opět nulový), pak jistě neproudí skrze plochu S

Abychom pochopili, proč můžeme průtok spočítat přes divergenci v celém objemu, rozdělme si objem V uzavřený plochou S na malé obdélníčky (kvádríky v \mathbb{R}^3) a spočítejme divergenci v těchto obdélnících (na obrázku jsou znázorněny všechny divergence kladné). Při dostatečně jemném dělení a spojitosti vektorového pole \vv{F} zjistíme, že divergence mezi sousedícími stěnami se odečtou (znázorněno červeně) a zbudou nám pouze divergebce v "okrajovém pásu" (aka plocha S) mířící ven z V (znázorněny modře).



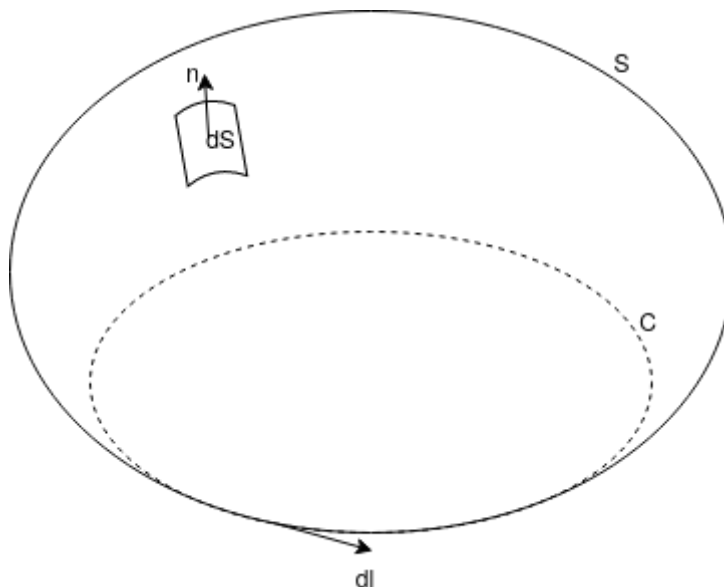
Poznamenejme, že znaménko průtoku **dovnitř** plochy S je **opačné**, než znaménko průtoku **vně** této plochy. Aneb tuto větu můžeme interpretovat tak, že pokud **dohromady** (skrže integrál) uvnitř V (respektive S) nevzniká ani nemizí žádná kapalina (vektorové pole \mathbf{F}), pak průtok skrze plochu S musí být nulový (při znaménkové konvenci řečené výše).

Množina $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je **jednoduše souvislá oblast**, pokud je G otevřená, souvislá (libovolné 2 body lze spojit lomenou čarou, která leží v G) a s každou uzavřenou křivkou leží v G i vnitřek této křivky.

“ Aneb každá uzavřená křivka v G lze spojitě deformovat do bodu, aniž bychom G opustili.

Věta $\text{D}\{\text{VT.2}\}$ (Stokesova věta)

Nechť plochu S , která je omezená ohrazenou křivkou C tvořící kraj S , lze rozložit na konečný počet částí, které jsou grafy funkcí proměnných x, y , totéž pro x, z a y, z . Nechť vektorové pole $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ má spojitě diferencovatelné složky na S . Dále nechť křivka C je orientovaná souhlasně s plochou S . Pak platí $\oint_C \text{scal}\{\mathbf{F}\} \cdot d\mathbf{x} = \iint_S \text{scal}\{\text{rot}\{\mathbf{F}\}\} \cdot d\mathbf{S}$ nebo ekvivalentně $\oint_C \text{scal}\{\mathbf{F}\} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \text{scal}\{\text{rot}\{\mathbf{F}\}\} \cdot d\mathbf{S}$



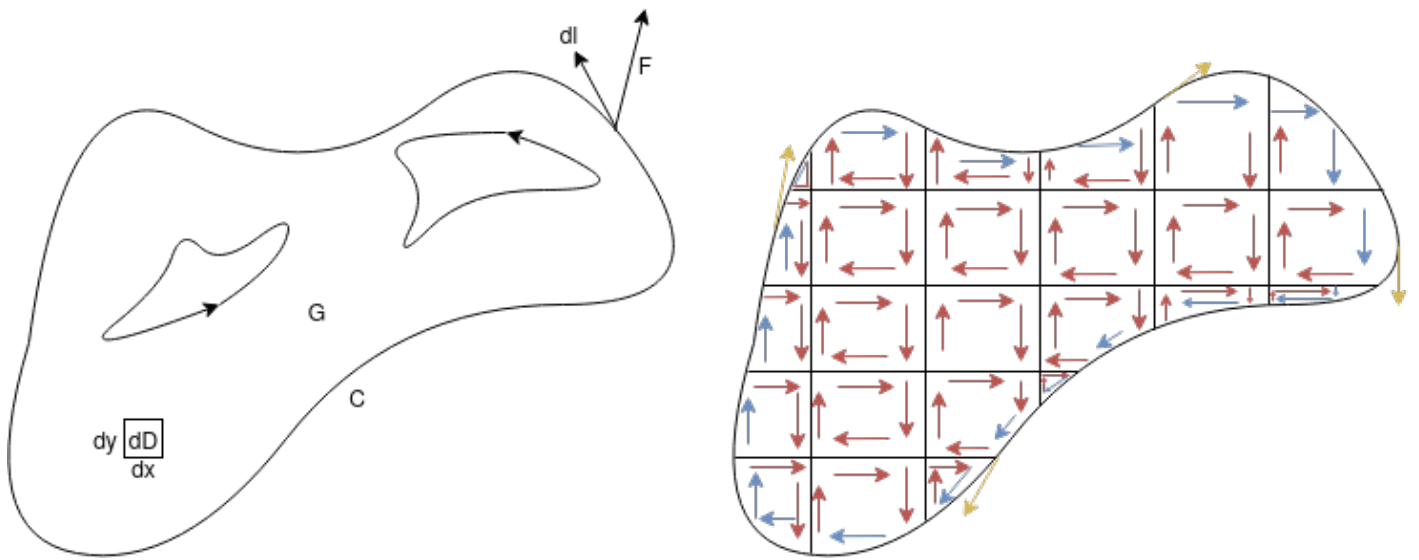
Geometrická odůvodnění si ukážeme na jednodušší variantě - na Greenově větě $\tag{VT.3}$.

Věta $\tag{VT.3}$ (Greenova věta)

Greenova věta je speciální případ Stokesovy věty $\tag{VT.2}$ pro plochu S , zde značenou jako G , jakožto rovinu.

Nechť G je jednoduše souvislá oblast v rovině, C je uzavřená, kladně orientovaná (proti směru hod. ručiček) křivka v G . Dále nechť $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je vektorové pole se spojitě diferencovatelnými složkami na uzávěru \overline{G} . Pak platí
$$\oint_C \text{scal}\{\mathbf{F}\} \cdot d\mathbf{v}_x = \iint_D \text{rot}\{\mathbf{F}\} \cdot \overbrace{dx \wedge dy}^{dD},$$
 kde D je část množiny G omezená křivkou C a $d\mathbf{v}_x = dx \wedge dy$ udává tečnu ke křivce C v daném bodě.

Opět tuto větu odůvodníme podobným argumentem jako u Gaussovy věty $\tag{VT.1}$, tj. tentokrát plochu S rozdělíme na obdélníčky, ve kterých určíme rotaci vektorového pole $\text{rot}\{\mathbf{F}\}$. Zjemňujeme-li toto dělení, všimneme si, že sousedí-li 2 obdélníčky a mají stejně orientovanou rotaci, pak se na sdílené straně "potkají 2 protichůdné směry" a celkem se rotace "odečte". Tímto nám opět zbude pouze rotace na okraji oblasti G , tedy křivka C , při které je rotace tečná ke křivce C - to je ale přesně integrál skalárního součinu vektorového pole \mathbf{F} a malého tečného kroku na křivce C , tj. $d\mathbf{v}_x$.



Revision #21

Created 5 June 2023 12:44:29 by Sceptri

Updated 19 June 2023 09:31:24 by Sceptri