

# Vektorový integrální počet

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left|\right| #1 \right|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\set#1{\left\{ #1
\right\}} \xdef\brackets#1{\left( #1 \right)} \xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}}
\xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}}
\xdef\mc#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}}
\xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi}
\xdef\Tagged#1{(\text{#1})} \xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2#eq-
#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef>tagEq#1{\href{#eq-#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDe#1{\href{#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}}
\xdef\conv#1{\mathrm{conv}\,, #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\,, #1}
\xdef\aff#1{\mathrm{aff}\,, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\,, #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\,,
#1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\,, #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1}
\xdef\interior#1{\mathrm{int}\,, #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\,, #1}
\xdef\grad#1{\mathrm{grad}\,, #1} \xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1}
\xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1} \xdef\hess#1{\nabla^2\,, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x
#1} \xdef\jacobx#1{D_x #1} \xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1}
\xdef\co#1{\mathrm{co}\,, #1} \xdef\iter#1{\wedge^{#1}} \xdef\str{\wedge} \xdef\spv{\mc V}
\xdef\civ{\mc U} \xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv x} \xdef\yy{\vv y}
\xdef\partDiff#1{\frac{\partial}{\partial #1}} \xdef\partDeriv#1#2{\frac{\partial #1}{\partial
#2}} \xdef\NPartDeriv#1#2#3{\frac{\partial^{#1} #2}{\partial #3}}
\xdef\Div#1{\mathrm{div}\,, #1} \xdef\rot#1{\mathrm{rot}\,, #1} \xdef\d{\mathrm{d}} $$$
```

## Základní pojmy

Připomeňme definici **jednoduchého oboru**  $\tilde{V}$  v  $\mathbb{R}^3$  (Definice 23 v prezentacích), což je množina, která je **sjednocením jednoduchých oborů** vzhledem ke všem osám, přičemž jednoduchý obor  $V$  vzhledem k např. ose  $z$  definujeme jako  $V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid [x, y] \in M, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$ , kde  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  je množina v **rovině**, která je omezená uzavřenou jednoduchou křivkou  $C$ .

“Jednoduchá křivka neprotíná sama sebe.

### Definice $\nabla$ (nabla operátor)

Hamiltonův *nabla operátor* definujeme v  $\mathbb{R}^2$  jako  $\nabla := \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ , z čehož dostáváme, že funkci  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  přiřazuje vektorové pole  $\nabla f = \text{grad } f$

$= \nabla_x f, \nabla_y f$ . Obdobně bychom jej definovali pro  $\mathbb{R}^n$ .

“ Hamiltonův operátor  $\nabla$  aplikovaný na vektorové pole  $\mathbf{F}$  v bodě  $(x,y)$  si můžeme představit jako změny  $\mathbf{F}(x,y)$  při malém posunutí  $(x,y)$ . Potom skalární součin vektorového pole s tímto operátorem pak dává v jistém smyslu "průměr" jak je změna vektorového pole rovnoběžná se zmíněným malým posunem. Naopak vektorový součin těchto dvou členů dává "průměrnou" míru kolmosti změny vektorového pole a malé změny zkoumaného bodu.

Pro lepší intuici doporučuji [toto video](#).

Uvedme jako poznámku, že operátor  $\nabla^2 = \Delta$  se nazývá **Laplaceův operátor** a pro skalární funkci  $f$  má tvar  $\Delta f = \nabla_x^2 f + \nabla_y^2 f$

“ Nabla operátor aplikovaný na vektorovou funkci  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (tj. vektorové pole) dává **Jakobiho matici**  $\nabla \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}$

## Definice $\nabla \cdot \mathbf{F}$ (divergence)

Nechť máme vektorovou funkci  $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ , kde funkce  $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jsou spojitě diferencovatelné.

“ Tedy jsou spojitě spolu se svými prvními parciálními derivacemi

Pak s použitím definice  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  označíme **divergenci** vektorového pole jako funkci  $\text{Div} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definovanou předpisem  $\text{Div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = P_x + Q_y$ . Obdobně bychom divergenci definovali pro vektorové pole v  $\mathbb{R}^n$ .

Dále si uvědomme, že *divergence* uvádá "poměr" přítoku a odtoku vektorového pole v daném bodě. To jest, je-li  $\text{Div}(\mathbf{F})(x,y) > 0$ , pak v bodě  $(x,y)$  více vektorové odtéká, než je do toho bodu přítok. Analogicky pro situaci  $\text{Div}(\mathbf{F})(x,y) < 0$ .

V analogii s kapalinami by to byl bod, ze kterého kapalina více odtéká, než do něj přitéká - tj. v tomto bodě vzniká kapalina.

Má-li vektorové pole charakterizující nějakou kapalinu pozitivní divergenci, potom by se v něm skrvny (např. ropná skrvna v oceánu) zvětšovaly postupem času

Obdobně můžeme zapsat i **totální diferenciál** funkce  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $df = \text{scal} \{ \nabla f \} \cdot d\mathbf{x} = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$

## Definice $\{ZD.3\}$ (zřídlovost)

Vektorové pole  $\mathbf{F}$  nazveme **nezřídlové**, pokud pro každý jeho bod  $(x,y)$  platí  $\text{Div} \{ \mathbf{F} \}(x,y) = 0$ . V opačném případě jej nazveme **zřídlové**.

## Definice $\{ZD.4\}$ (rotace, curl)

Nechť máme vektorovou funkci  $\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ , kde funkce  $P, Q, R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  jsou spojitě diferencovatelné.

Pak s použitím definice  $\{ZD.1\}$  označíme **rotaci** vektorové pole jako funkci  $\text{rot} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  s předpisem  $\text{rot} \{ \mathbf{F} \} = \nabla \times \mathbf{F} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$

Pro dvourozměrné vektorové pole  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  pak uvažujeme rotaci jako  $\text{rot} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  s 3. vstupní souřadnicí vždy nulovou a platí  $\text{rot} \{ \mathbf{F} \} = (0, 0, Q_x - P_y)$

“ Zde je důležité si uvědomit, že ačkoliv pracujeme s 2D vektorovým polem, jeho rotace bude ležet ve 3. dimenzi, neboť musí být kolmá na jak na  $\nabla$ , tak i na vektorové pole  $\mathbf{F}$ .

Rotace  $\text{rot} \{ \mathbf{F} \}(x,y)$  udává lokální míru rotace v bodě  $(x,y)$  a je-li nulová, pak takové pole nazveme **nevírové**.

“ Je-li rotace  $\text{rot} \{ \mathbf{F} \} > 0$  vektorového pole  $\mathbf{F}$ , pak se tato rotace děje proti směru hodinových ručiček z pohledu kladně orientovaného normálního vektoru (osy  $z$  pro  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ).

## Lemma $\{ZT.1\}$ (vlastnosti rotace a divergence)

Nechť máme funkci  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a vektorovou funkci  $F(x) = (P_1(x), \dots, P_n(x))$ , kde funkce  $P_1, \dots, P_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jsou spojitě diferencovatelné. Pak platí

1.  $\operatorname{rot}\{\operatorname{grad} f\} = \mathbf{0}$
2.  $\operatorname{Div}\{\operatorname{rot}\{\mathbf{F}\}\} = 0$

*Důkaz:*

Důkaz provedeme pro každou část zvlášť. Pro první rovnost jistě platí  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \operatorname{nabla} \times \operatorname{grad} f = \operatorname{nabla} \times \operatorname{nabla} f$ , přičemž si zde můžeme uvědomit, že  $\operatorname{nabla} f$  je *de facto* lineární násobek operátoru  $\operatorname{nabla}$ , tedy  $\operatorname{nabla}$  a  $\operatorname{nabla} f$  jsou lineárně závislé. Z tohoto plyne, že jejich vektorový součin je nulový vektor. Více rigorózně tento důkaz provedeme v  $\mathbb{R}^3$  následovně

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} f &= \operatorname{nabla} \times \operatorname{grad} f = \operatorname{nabla} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

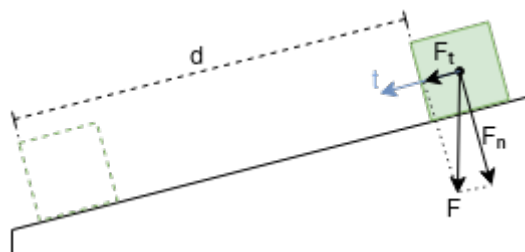
za předpokladu, že  $f$  je dostatečně hladká. V  $\mathbb{R}^n$  by se důkaz vedl obdobně.

Dokažme nyní druhou část tohoto lemmatu. Jistě  $\operatorname{Div}\{\operatorname{rot}\{\mathbf{v}\}\} = \operatorname{scal}\{\nabla\}\{\operatorname{rot}\mathbf{v}\} = \operatorname{scal}\{\nabla\}\{\nabla \times \mathbf{v}\}$ ,  $\nabla \times \mathbf{v}$  chápeme-li nyní  $\nabla$  jako vektor, pak z definice vektorového součinu je  $\nabla \times \mathbf{v} \perp \nabla \implies \operatorname{scal}\{\nabla\}\{\nabla \times \mathbf{v}\} = 0$ .  $\blacksquare$

**Definice**  $\{D\}$  (křivkový integrál 2. druhu)

Uvažujme vektorové pole  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a křivku  $C$  charakterizovanou parametrizací  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  pro  $t \in [a, b]$ . Potom integrál 
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt,$$
 kde  $d\mathbf{x} = (dx, dy)$  a  $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$ , nazveme **křivkový integrál 2. druhu**.

Křivkovým integrálem 2. druhu v jakém si smyslu zobecňujeme koncept "práce" (z fyziky), přičemž standardně jsme zvyklí na vztah  $W = F \cdot d$ , kde  $d$  je délka trajektorie a  $F$  síla působící na těleso posunující ho po zmíněné trajektorii. Představit si můžeme například šikmou plochu, viz obrázek.



V této situaci gravitační pole působící silou  $\vec{F}$  vykoná práci pouze části síly  $F$ , která je tečná (v tomto případě rovnoběžná) ke směru pohybu. Tato tečná část je označena  $\vec{F}_t$  a jistě platí  $\vec{F}_t = \text{scal}\{\vec{F}\} \cdot \vec{t}$  a taktéž  $W = \int \vec{F}_t \cdot d\vec{r} = \int \text{scal}\{\vec{F}\} \cdot \vec{t} \cdot d\vec{r}$  To ovšem můžeme zapsat i pomocí křivkového integrálu 2. druhu, který udává

**práci, kterou vykoná vektorové pole při posunu tělesa po trajektorii**

$$W = \int_C \text{scal} \{ \vec{F} \} \{ \vec{t} \} \, dt.$$

## Definice $\S{D}{ZD.6}$ (plošný integrál 2. druhu)

Uvažujme vektorové pole  $\vv{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a plochu  $S$ . Potom 
$$\iint_S \text{scal} \{ \vv{F} \} \{ \vec{n} \} \, dS = \iint_S P(x,y,z) \, dy \, dz + Q(x,y,z) \, dx \, dz + R(x,y,z) \, dx \, dy,$$
 kde  $\vec{n}$  je normálový vektor plochy  $S$ , nazýváme **plošný integrál 2. druhu**.

Plošný integrál 2. druhu nám udává průtok (*flux*) vektorového pole  $\vv{F}$  skrze plochu  $S$ , který v každém bodě této plochy počítáme jako skalární součin normály  $\vec{n}$  k ploše  $S$  a vektorového pole  $\vv{F}$  (což nám dá, jak "velká část"  $\vv{F}$  směřuje ve směru normály  $\vec{n}$  a tedy protíká onou plochou  $S$ )

## Důležité vlastnosti

### Věta $\S{D}{VT.1}$ (Gaussova-Ostrogradského věta/Gauss divergence theorem)

Zformulujme tuto větu prvně slovně, poté i s podmínkami rigorózně:

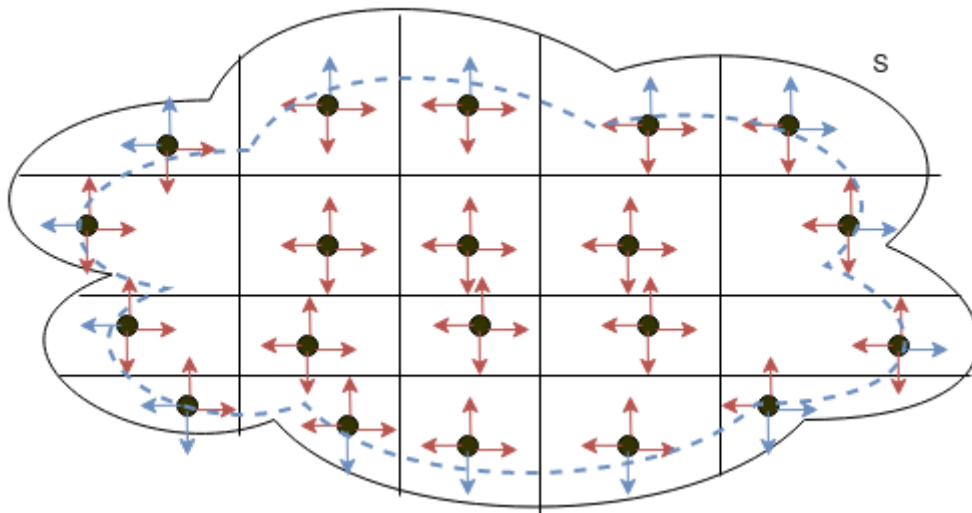
*Průtok vektorového pole  $\vv{F}$  skrze ohraničenou plochu  $S$  je roven integrálu z divergence  $\text{Div}\{\vv{F}\}$  přes celý objem  $V$ , který plocha  $S$  ohraničuje.*

Nechť  $V$  je jednoduchý obor v  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vv{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je vektorové pole se spojitě diferencovatelnými složkami v každé proměnné a nechť  $S$  je ohraničená plocha ohraničující  $V$  orientovaná ve směru vnější normály. Pak platí 
$$\iint_S \text{scal} \{ \vv{F} \} \{ \vec{n} \} \, dS = \iiint_V \text{Div} \{ \vv{F} \} \, dV$$

“ Zde si uvědomme, že

- je-li kapalina nestačitelná (samovolně nemizí/nevzniká, tedy  $\text{Div}\{\vv{F}\} = 0$ ), potom stejná část "přiteče" do libovolné oblasti, jako z ní odteče
- stejně tak, točí-li se kapalina (vektorové pole  $\vv{F}$ ) pouze v rámci této oblasti (tedy  $\text{Div}\{\vv{F}\}$  je opět nulový), pak jistě neproudí skrze plochu  $S$

Abychom pochopili, proč můžeme průtok spočítat přes divergenci v celém objemu, rozdělme si objem  $V$  uzavřený plochou  $S$  na malé obdélníčky (kvádříky v  $\mathbb{R}^3$ ) a spočítejme divergenci v těchto obdélnících (na obrázku jsou znázorněny všechny divergence kladné). Při dostatečně jemném dělení a spojitosti vektorového pole  $\vv{F}$  zjistíme, že divergence mezi sousedícími stěnami se odečtou (znázorněno červeně) a zbudou nám pouze divergebce v "okrajovém pásu" (aka plocha  $S$ ) mířící ven z  $V$  (znázorněny modře).



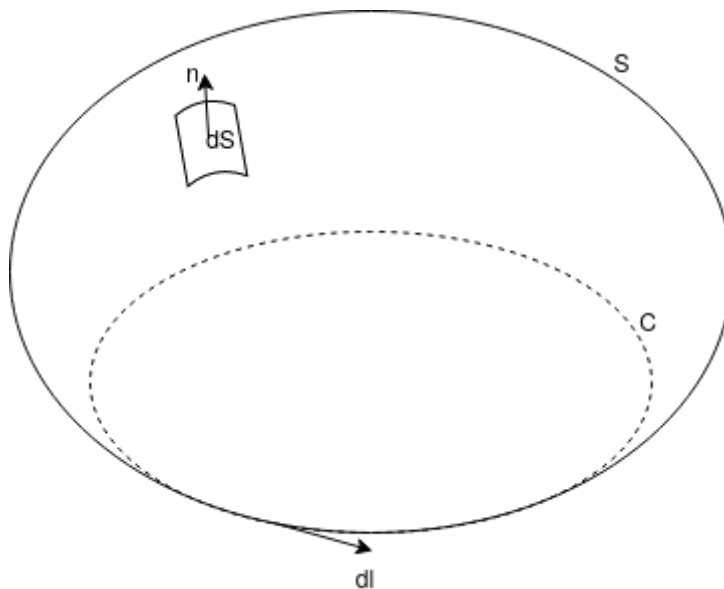
Poznamenejme, že znaménko průtoku **dovnitř** plochy  $S$  je **opačné**, než znaménko průtoku **vně** této plochy. Aneb tuto větu můžeme interpretovat tak, že pokud **dohromady** (skrže integrál) uvnitř  $V$  (respektive  $S$ ) nevzniká ani nemizí žádná kapalina (vektorové pole  $\mathbf{F}$ ), pak průtok skrze plochu  $S$  musí být nulový (při znaménkové konvenci řečené výše).

Množina  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  je **jednoduše souvislá oblast**, pokud je  $G$  otevřená, souvislá (libovolné 2 body lze spojit lomenou čarou, která leží v  $G$ ) a s každou uzavřenou křivkou leží v  $G$  i vnitřek této křivky.

“ Aneb každá uzavřená křivka v  $G$  lze spojitě deformovat do bodu, aniž bychom  $G$  opustili.

## Věta $\text{D}\{\text{VT.2}\}$ (Stokesova věta)

Nechť plochu  $S$ , která je omezená ohrazenou křivkou  $C$  tvořící kraj  $S$ , lze rozložit na konečný počet částí, které jsou grafy funkcí proměnných  $x, y$ , totéž pro  $x, z$  a  $y, z$ . Nechť vektorové pole  $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  má spojitě diferencovatelné složky na  $S$ . Dále nechť křivka  $C$  je orientovaná souhlasně s plochou  $S$ . Pak platí  $\oint_C \text{scal}\{\mathbf{F}\} \cdot d\mathbf{x} = \iint_S \text{scal}\{\text{rot}\{\mathbf{F}\}\} \cdot d\mathbf{S}$  nebo ekvivalentně  $\oint_C \text{scal}\{\mathbf{F}\} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \text{scal}\{\text{rot}\{\mathbf{F}\}\} \cdot d\mathbf{S}$



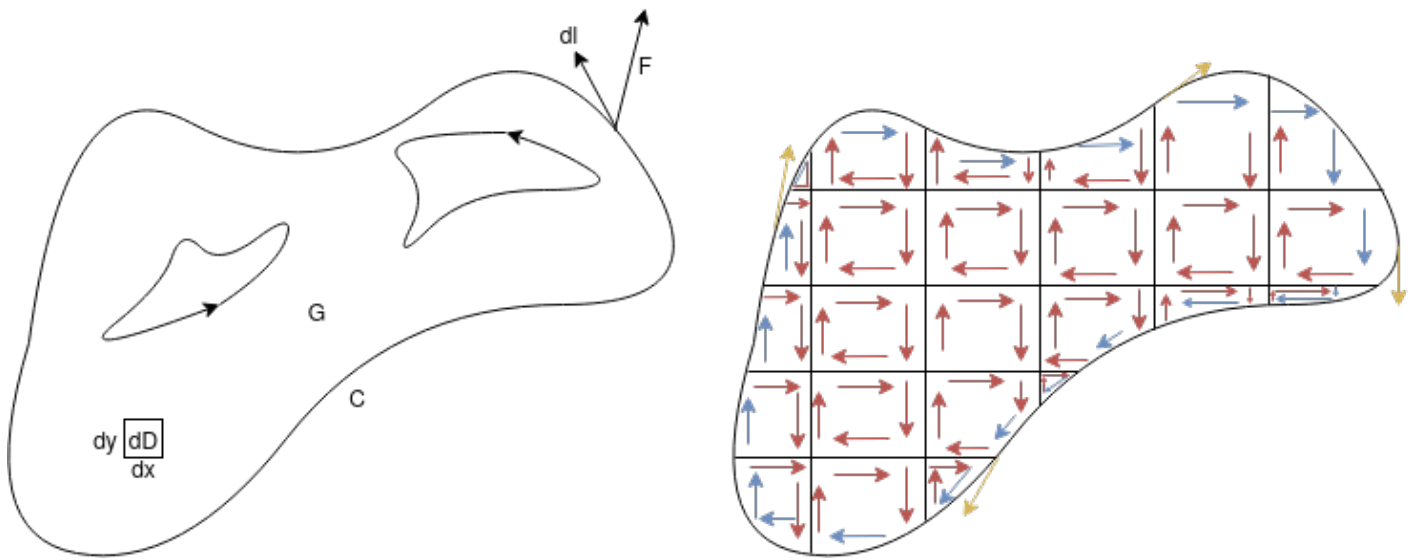
Geometrická odůvodnění si ukážeme na jednodušší variantě - na Greenově větě  $\tag{VT.3}$ .

### Věta $\tag{VT.3}$ (Greenova věta)

Greenova věta je speciální případ Stokesovy věty  $\tag{VT.2}$  pro plochu  $S$ , zde značenou jako  $G$ , jakožto rovinu.

Nechť  $G$  je jednoduše souvislá oblast v rovině,  $C$  je uzavřená, kladně orientovaná (proti směru hod. ručiček) křivka v  $G$ . Dále nechť  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  je vektorové pole se spojitě diferencovatelnými složkami na uzávěru  $\overline{G}$ . Pak platí 
$$\oint_C \text{scal}\{\mathbf{F}\} \cdot d\mathbf{v}_x = \iint_D \text{rot}\{\mathbf{F}\} \cdot \overbrace{dx \wedge dy}^{dD},$$
 kde  $D$  je část množiny  $G$  omezená křivkou  $C$  a  $d\mathbf{v}_x = dx \wedge dy$  udává tečnu ke křivce  $C$  v daném bodě.

Opět tuto větu odůvodníme podobným argumentem jako u Gaussovy věty  $\tag{VT.1}$ , tj. tentokrát plochu  $S$  rozdělíme na obdélníčky, ve kterých určíme rotaci vektorového pole  $\text{rot}\{\mathbf{F}\}$ . Zjemňujeme-li toto dělení, všimneme si, že sousedí-li 2 obdélníčky a mají stejně orientovanou rotaci, pak se na sdílené straně "potkají 2 protichůdné směry" a celkem se rotace "odečte". Tímto nám opět zbude pouze rotace na okraji oblasti  $G$ , tedy křivka  $C$ , při které je rotace tečná ke křivce  $C$  - to je ale přesně integrál skalárního součinu vektorového pole  $\mathbf{F}$  a malého tečného kroku na křivce  $C$ , tj.  $d\mathbf{v}_x$ .



Revision #21

Created 5 June 2023 12:44:29 by Sceptri

Updated 19 June 2023 09:31:24 by Sceptri