

Teorie sociálního výběru

```

 $\langle \#1, \#2 \rangle$ 
 $\| \#1 \|$ 
 $\rho$ 
 $\&$ 
 $\text{AND}$ 
 $\left\{ \#1 \right\}$ 
 $\frac{\partial \#1}{\partial \#2}$ 
 $\begin{pmatrix} \#1 \end{pmatrix}$ 
 $\boldsymbol{\#1}$ 
 $\mathcal{\#1}$ 
 $\mathbf{\#1}$ 
 $\mathbb{P}\{\#1\}$ 
 $\varepsilon$ 
 $\lambda$ 
 $\vartheta$ 
 $\alpha$ 
 $\varphi$ 
 $\text{\text{\#1}}$ 
 $\text{\#1}$ 
 $\text{\#2} \text{\#eq-}\#1 \text{\text{\#1}}$ 
 $\text{\#2} \text{\#de-}\#1 \text{\text{\#1}}$ 
 $\text{\#eq-}\#1 \text{\text{\#1}}$ 
 $\text{\#de-}\#1 \text{\text{\#1}}$ 
 $\text{\htmlid{eq-}\#1}$ 
 $\text{\htmlid{de-}\#1}$ 
 $\mathbf{\#1}$ 
 $\mathrm{conv}$ 
 $\mathrm{cone}$ 
 $\mathrm{aff}$ 
 $\mathrm{lin}$ 
 $\mathrm{span}$ 
 $\mathcal{O}$ 
 $\mathrm{ri}$ 
 $\mathrm{rd}$ 
 $\mathrm{r} \partial$ 
 $\mathrm{interior}$ 
 $\mathrm{proj}$ 
 $\mathrm{epi}$ 
 $\mathrm{grad}$ 
 $\mathrm{grad}^T$ 
 $\mathrm{grad}_x$ 
 $\nabla^2$ 
 $\nabla^2_x$ 
 $\mathrm{jacob}_x$ 
 $\mathrm{jacob}_D$ 
 $\mathrm{subdif}$ 
 $\mathrm{co}$ 
 $\mathrm{iter}^{\#1}$ 
 $\mathrm{str}^*$ 
 $\mathrm{spv}$ 
 $\mathrm{civ}$ 
 $\mathrm{other}$ 
 $\hat{\#1}$ 
 $\mathbf{x}$ 
 $\mathbf{y}$ 

```

Teorie sociálního výběru - teorie her o volebních systémech

Příklad

Máme 15 zaměstnanců - ti si chtějí zvolit nového šéfa - a 3 kandidáty \$\$ A,B,C \$\$ Potom preferenční uspořádání jsou

- 7 zaměstnanců: $\$A > B > C\$$
- 7 zaměstnanců: $\$B > A > C\$$
- 1 zaměstnanec: $\$C > A > B\$$

Přehled bodů:

# people	A	B	C
7	2	1	0
7	1	2	0
1	1	0	2

Celkem má \$A\$ 22 bodů, \$21\$ bodů pro \$B\$ a \$2\$ pro \$C\$

Pokud by ale těch 7 zaměstnanců s 1. \$B\$ chtělo uškodit \$A\$, mohou si změnit preference na $B > C > A$

To stejné mohou udělat i ti s 1. \$A\$. Potom preferenční uspořádání jsou

- 7 zaměstnanců: $A > C > B$
- 7 zaměstnanců: $B > C > A$
- 1 zaměstnanec: $C > A > B$

Přehled bodů:

# people	A	B	C
7	2	0	1
7	0	2	1
1	1	0	2

Celkem má \$A\$ 15 bodů, \$14\$ bodů pro \$B\$ a \$16\$ pro \$C\$

Označme

- \$N\$ voliče
- \prec_i -tíci uspořádání \prec_i ($i \in N$) nazývanou **preferenční uspořádání** na množině \$A\$
- \$A\$ množinu variant

Preferenční schéma $p : N \rightarrow S_m$, $|A| = m$, kde S_m je permutace množiny \$A\$

Dále označme \$P\$ množinu všech preferenčních schémat (pro pevné \$N, A\$).

Náš cíl je najít pevné $d : P \rightarrow S_m$, kde d nazýváme **funkcí sociálního rozhodování** $d(\prec_i) = \prec_j$ a požadujeme

1.

$$(\forall \prec_i \in P) (\forall a, b \in A) (\forall i \in N) \quad a \prec_i b \implies a < b$$
$$\tag{T\{FSR-1\}}$$

2.

$$(\forall \prec_i \in N, \prec_j \in P) (\forall a, b \in A) \quad \{i \mid a \prec_i b\} = \{i \mid a \prec_j b\} \implies (a < b \text{ iff } a \prec b)$$
$$\tag{T\{FSR-2\}}$$

Definice $D \subseteq P$

Dále $j \in N$ nazveme **diktátorem**, pokud $d(\prec_i) = \prec_j$

Věta $\mathcal{D}\{\text{Arrow}\}$

Nechť $n \geq 2$, $n \geq 3$. Pak libovolná funkce soc. rozhodování má diktátora.

Příklad

- $m = 2$, $n \geq 2$, např. většinové pravidlo

$$\{I \subseteq N \mid (\forall i \in I) a <_i b \mid (\forall j \in N \setminus I) b <_j a\}$$

Je-li $|I| > \frac{n}{2} \implies a < b$ (a opačně). Při n sudém dáme na "čestného předsedu"

- $m = 2$, $n = 2$, možnosti

$$a <_1 b, a <_2 b \quad \implies a < b \quad a <_1 b, b <_2 a \quad \implies a <$$

$$b, \overbrace{b < a}^{\text{2. diktátor}}, \overbrace{a < b}^{\text{1. diktátor}}, b <$$

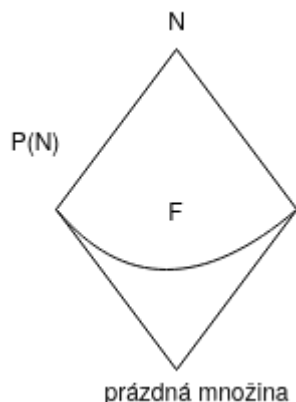
$$a, \underbrace{b < a}_{\text{2. diktátor}}, \underbrace{b < a}_{\text{1. diktátor}}, b < a \mid b <_1 a, b <_2 a \quad \implies b < a$$

$$a, \underbrace{b < a}_{\text{2. diktátor}}, \underbrace{b < a}_{\text{1. diktátor}}, b < a \mid b <_1 a, b <_2 a \quad \implies b < a$$

Definice $\mathcal{D}\{\text{Filtr}\}$

Řekneme, že \mathcal{F} je filtr na množině N , pokud

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- $F, G \in \mathcal{F} \implies F \cap G \in \mathcal{F}$
- $F \in \mathcal{F}, F \subseteq G \implies G \in \mathcal{F}$



Dále definujeme **hlavní filtr** $\mathcal{F}_A = \{F \subseteq N \mid a \in F\}$ a **ultrafiltr** - maximální filtr, tj. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq P(N) \implies \mathcal{G} = \mathcal{F}$

Lemma $\mathcal{D}\{L1\}$

Filtr \mathcal{F} na N je **ultrafiltr** $\iff \forall F \subseteq N \text{ je } F \in \mathcal{F} \text{ nebo } N \setminus F \in \mathcal{F}$

Důkaz $\tag{L1}$

Pokud by $F \notin \mathcal{F}$ a ani $N \setminus F \in \mathcal{F}$, pak generujeme $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \mathcal{F}_F$

Nyní je třeba ukázat, že $\emptyset \notin \mathcal{G}$. Kdyby ano, pak by muselo platit $\emptyset = F \cap G$ pro $G \in \mathcal{F}$, pak $G \subseteq N \setminus F$, což je spor s $N - F \notin \mathcal{F}$.

Lemma $\mathcal{D}\{L2\}$

Pro libovolnou konečnou množinu N je každý ultrafiltr hlavní.

Podmnožina $F \subseteq N$ **přehrává** F' , typicky $F' = N \setminus F$, ve dvojici $a, b \in A$, platí-li $a \leq_F b$, $a \leq_{F'} b \implies a < b$, kde pod $a \leq_F b$ myslíme $(\forall i \in F) \quad a \leq_i b$

Lemma $\mathcal{D}\{L3\}$

Pokud F přehrává $F' = N \setminus F$ pro $d \in a, b$ a x, y jsou libovolné $x, y \in A \implies F$ přehrává F' i v x, y

“ Tedy pokud umí vynutit $a < b$ pro nějakou dvojici, umí to pro všechny dvojice

Důkaz $\text{tagDe}\{L3\}$

Uvažujme $c \leq_F a \leq_F b$ a také $b \leq_{F'} c \leq_{F'} a$ (preferenční schéma musí být připravené pro všechny situace).

Pak ale podle $\text{tagEq}\{FSR-1\}$ musí být $c < a$, ale také $a < b$ podle předpokladů. Celkem máme, že $c < a < b$.

Nyní vezměme libovolná $c \leq_F, \leq_{F'}$ splňující $c \leq_F b, b \leq_F c$, pak dostaneme $c < b$, protože výsledek d nezávisí na a podle $\text{tagEq}\{FSR-2\}$. Jinak řečeno F přehrává F' i v c, b .

Duálně nahradíme b nějakým e a stejně se dostaneme k x, y

Zde F nazveme **rozhodující (vládnoucí) rodina** pro d

Lemma $\mathcal{D}\{L4\}$

Pro $n \geq 2, m \geq 3$ je množina všech vládnoucích rodin **ultrafiltr** na N

Důkaz $\text{tagDe}\{L4\}$

Nechť F je vládnoucí rodina a platí $F \subseteq G \subseteq N \implies G$ je vládnoucí rodina. Mějme $a, b, c \in A$ s $F \subseteq G \subseteq N$ a požadujeme

1. $a \leq_{N-G} c \leq_{N-G} b$
2. $a \leq_{G-F} b \leq_{G-F} c$
3. $b \leq_F a \leq_F c$

Z $\text{tagEq}\{\text{FSR-1}\}$ víme, že $a < c$. Navíc G přehrává G' v b, c a také F je vládnoucí rodina a 3. víme, že $b < a < c$.

Celkem tedy G přehrává G' v b, c a tedy G je vládnoucí.

Dokažme, že F je **ultrafiltr** a tedy $\emptyset \neq F \subseteq N \implies F \text{ nebo } F' \text{ je vl. rodina}$, tj. $b \leq_{F'} a$, $a \leq_F b$, pak

- $a < b \implies F$ je vl.
- $b < a \implies F'$ je vl.

Ukažme nyní uzavřenost na průniky. Nechtě $\emptyset \neq F, G \subseteq N$ a F, G vládnoucí $\implies F \cap G$ vládnoucí. Vezměme nyní $b \leq_{N \setminus (F \cup G)} c \leq_{N \setminus (F \cup G)} a$ $g \leq_{F \setminus G} a \leq_{F \setminus G} c$ $c \leq_{G \setminus F} b \leq_{G \setminus F} a$ $q \leq_{F \cap G} c \leq_{F \cap G} b$, z čehož dohromady víme z

- $F = (F \cap G) \cup (F \setminus G)$, že $a < c$
- $G = (F \cap G) \cup (G \setminus F)$, že $c < b$

Celkem $a < c < b \implies a < b$, tedy $F \cap G$ je vládnoucí pro a, b

Důkaz $\text{tagDe}\{\text{Arrow}\}$

Jelikož $\text{mcal } F = \uparrow_j \implies \text{set}\{j\}$ je vládnoucí a tedy j je **diktátor**.

Revision #3

Created 17 April 2023 06:03:03 by Sceptri

Updated 24 April 2023 06:04:22 by Sceptri