

# Teorie sociálního výběru

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left|\! \right|_#1} \xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \text{and} \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}} \xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{\text{#1}} \xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2#eq-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{#eq-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagDe#1{\href{#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1 \xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1 \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1 \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1 \xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1 \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1 \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial}, #1 \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1 \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1 \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1 \xdef\gradT#1{\mathrm{grad}}^T #1 \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}}_x #1 \xdef\hess#1{\nabla^2}, #1 \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1} \xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1 \xdef\iter#1{\wedge^{[#1]}} \xdef\str{\wedge^*} \xdef\spv{\mathcal V} \xdef\civ{\mathcal U} \xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv x} \xdef\yy{\vv y} $$
```

“ Teorie sociálního výběru - teorie her o volebních systémech

## Příklad

Máme 15 zaměstnanců - ti si chtějí zvolit nového šéfa - a 3 kandidáty  $A, B, C$  Potom preferenční uspořádání jsou

- 7 zaměstnanců:  $A > B > C$
- 7 zaměstnanců:  $B > A > C$
- 1 zaměstnanec:  $C > A > B$

Přehled bodů:

# people	A	B	C
7	2	1	0
7	1	2	0
1	1	0	2

Celkem má \$A\$ 22 bodů, \$21\$ bodů pro \$B\$ a \$2\$ pro \$C\$

Pokud by ale těch 7 zaměstnanců s 1. \$B\$ chtělo uškodit \$A\$, mohou si změnit preference na  $B > C > A$

To stejné mohou udělat i ti s 1. \$A\$. Potom preferenční uspořádání jsou

- 7 zaměstnanců:  $A > C > B$
- 7 zaměstnanců:  $B > C > A$
- 1 zaměstnanec:  $C > A > B$

Přehled bodů:

# people	A	B	C
7	2	0	1
7	0	2	1
1	1	0	2

Celkem má \$A\$ 15 bodů, \$14\$ bodů pro \$B\$ a \$16\$ pro \$C\$

Označme

- \$N\$ voliče
- \$i\$-tici uspořádání  $(\prec_i)_{i \in N}$  nazývanou **preferenční uspořádání** na množině \$A\$
- \$A\$ množinu variant

**Preferenční schéma**  $p : N \rightarrow S_m, \text{quad } |A| = m$ , kde  $S_m$  je permutace množiny \$A\$

Dále označme \$P\$ množinu všech preferenčních schémat (pro pevné \$N, A\$).

Náš cíl je najít pevné  $d : P \rightarrow S_m$ , kde  $d$  nazýváme **funkcí sociálního rozhodování**  $d((\prec_i)_{i \in N}) = \prec$  a požadujeme

1.

$$(\forall (\prec_i)_{i \in N} \in P) (\forall a, b \in A) (\forall i \in N) \text{quad } a \prec_i b \implies a \prec b$$
$$\tag{T\{FSR-1\}}$$

2.

$$(\forall (\prec_i)_{i \in N}, (\prec_{i'})_{i' \in N} \in P) (\forall a, b \in A) \text{quad } \{i \mid a \prec_i b\} = \{i \mid a_{i'} \prec_{i'} b\} \implies (a \prec b \text{ iff } a \prec_{i'} b)$$
$$\tag{T\{FSR-2\}}$$

**Definice**  $D\{Dikt\}$

Dále  $j \in N$  nazveme **diktátorem**, pokud  $d((\prec_i)_{i \in N}) = \prec_j$

## Věta $\mathcal{D}\{\text{Arrow}\}$

Nechť  $n \geq 2$ ,  $n \geq 3$ . Pak libovolná funkce soc. rozhodování má diktátora.

## Příklad

1.  $m = 2$ ,  $n \geq 2$ , např. většinové pravidlo

$$\{I \subseteq N \mid (\forall i \in I) a \leq_i b \mid (\forall j \in N \setminus I) b \leq_j a\}$$

Je-li  $|I| > \frac{n}{2} \implies a < b$  (a opačně). Při  $n$  sudém dáme na "čestného předsedu"

2.  $m = 2$ ,  $n = 2$ , možnosti

$$a \leq_1 b, a \leq_2 b \quad \implies a < b \quad a \leq_1 b, b \leq_2 a \quad \implies a <$$

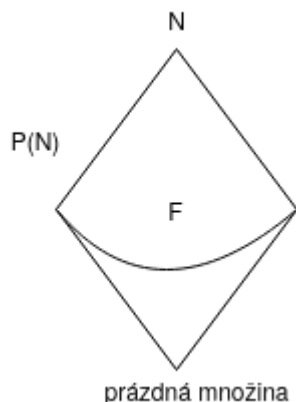
$$b, \overbrace{b < a}^{\text{2. diktátor}}, \overbrace{a < b}^{\text{1. diktátor}}, b <$$

$$a, \underbrace{b < a}_{\text{2. diktátor}}, \underbrace{b < a}_{\text{1. diktátor}}, b < a \mid b \leq_1 a, b \leq_2 a \quad \implies b < a$$

## Definice $\mathcal{D}\{\text{Filtr}\}$

Řekneme, že  $\mathcal{F}$  je filtr na množině  $N$ , pokud

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- $F, G \in \mathcal{F} \implies F \cap G \in \mathcal{F}$
- $F \in \mathcal{F}, F \subseteq G \implies G \in \mathcal{F}$



Dále definujeme **hlavní filtr**  $\mathcal{F} \uparrow_A = \{F \subseteq N \mid a \in F\}$  a **ultrafiltr** - maximální filtr, tj.  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq P(N) \implies \mathcal{G} = \mathcal{F}$

## Lemma $\mathcal{D}\{L1\}$

Filtr  $\mathcal{F}$  na  $N$  je **ultrafiltr**  $\iff \forall F \subseteq N \text{ je } F \in \mathcal{F} \text{ nebo } N \setminus F \in \mathcal{F}$

## Důkaz $\tag{L1}$

Pokud by  $F \notin \mathcal{F}$  a ani  $N \setminus F \notin \mathcal{F}$ , pak generujeme  $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \mathcal{F} \uparrow_F$

Nyní je třeba ukázat, že  $\emptyset \notin \mathcal{G}$ . Kdyby ano, pak by muselo platit  $\emptyset = F \cap G$  pro  $G \in \mathcal{F}$ , pak  $G \subseteq N \setminus F$ , což je spor s  $N - F \notin \mathcal{F}$ .

## Lemma $\mathcal{D}\{L2\}$

Pro libovolnou konečnou množinu  $N$  je každý ultrafiltr hlavní.

Podmnožina  $F \subseteq N$  **přehrává**  $F'$ , typicky  $F' = N \setminus F$ , ve dvojici  $a, b \in A$ , platí-li  $a \leq_F b$ ,  $a \leq_{F'} b \implies a < b$ , kde pod  $a \leq_F b$  myslíme  $(\forall i \in F) \quad a \leq_i b$

## Lemma $\mathcal{D}\{L3\}$

Pokud  $F$  přehrává  $F' = N \setminus F$  pro  $d \in a, b$  a  $x, y$  jsou libovolné  $x, y \in A \implies F$  přehrává  $F'$  i v  $x, y$

“ Tedy pokud umí vynutit  $a < b$  pro nějakou dvojici, umí to pro všechny dvojice

## Důkaz $\text{tagDe}\{L3\}$

Uvažujme  $c \leq_F a \leq_F b$  a také  $b \leq_{F'} c \leq_{F'} a$  (preferenční schéma musí být připravené pro všechny situace).

Pak ale podle  $\text{tagEq}\{FSR-1\}$  musí být  $c < a$ , ale také  $a < b$  podle předpokladů. Celkem máme, že  $c < a < b$ .

Nyní vezměme libovolná  $c \leq_F, \leq_{F'}$  splňující  $c \leq_F b, b \leq_F c$ , pak dostaneme  $c < b$ , protože výsledek  $d$  nezávisí na  $a$  podle  $\text{tagEq}\{FSR-2\}$ . Jinak řečeno  $F$  přehrává  $F'$  i v  $c, b$ .

Duálně nahradíme  $b$  nějakým  $e$  a stejně se dostaneme k  $x, y$

Zde  $F$  nazveme **rozhodující (vládnoucí) rodina** pro  $d$

## Lemma $\mathcal{D}\{L4\}$

Pro  $n \geq 2, m \geq 3$  je množina všech vládnoucích rodin **ultrafiltr** na  $N$

## Důkaz $\text{tagDe}\{L4\}$

Nechť  $F$  je vládnoucí rodina a platí  $F \subseteq G \subseteq N \implies G$  je vládnoucí rodina. Mějme  $a, b, c \in A$  s  $F \subseteq G \subseteq N$  a požadujeme

1.  $a \leq_{N-G} c \leq_{N-G} b$
2.  $a \leq_{G-F} b \leq_{G-F} c$
3.  $b \leq_F a \leq_F c$

Z  $\text{tagEq}\{\text{FSR-1}\}$  víme, že  $a < c$ . Navíc  $G$  přehrává  $G'$  v  $b, c$  a také  $F$  je vládnoucí rodina a 3. víme, že  $b < a < c$ .

Celkem tedy  $G$  přehrává  $G'$  v  $b, c$  a tedy  $G$  je vládnoucí.

Dokažme, že  $F$  je **ultrafiltr** a tedy  $\emptyset \neq F \subseteq N \implies F \text{ nebo } F' \text{ je vl. rodina}$ , tj.  $b \leq_{F'} a$ ,  $a \leq_F b$ , pak

- $a < b \implies F$  je vl.
- $b < a \implies F'$  je vl.

Ukažme nyní uzavřenost na průniky. Nechtě  $\emptyset \neq F, G \subseteq N$  a  $F, G$  vládnoucí  $\implies F \cap G$  vládnoucí. Vezměme nyní  $b \leq_{N \setminus (F \cup G)} c \leq_{N \setminus (F \cup G)} a$   $g \leq_{F \setminus G} a \leq_{F \setminus G} c$   $c \leq_{G \setminus F} b \leq_{G \setminus F} a$   $q \leq_{F \cap G} c \leq_{F \cap G} b$ ,  $z$  čehož dohromady víme z

- $F = (F \cap G) \cup (F \setminus G)$ , že  $a < c$
- $G = (F \cap G) \cup (G \setminus F)$ , že  $c < b$

Celkem  $a < c < b \implies a < b$ , tedy  $F \cap G$  je vládnoucí pro  $a, b$

## Důkaz $\text{tagDe}\{\text{Arrow}\}$

Jelikož  $\text{mcal } F = \uparrow_j \implies \text{set}\{j\}$  je vládnoucí a tedy  $j$  je **diktátor**.

Revision #3

Created 17 April 2023 06:03:03 by Sceptri

Updated 24 April 2023 06:04:22 by Sceptri