

# Teorie sociálního výběru

```

 $\langle \#1, \#2 \rangle$   $\| \left( \text{\right\} \#1 \right) \|$ 
 $\rho$   $\&$   $\quad \text{and} \quad$   $\left( \#1 \right)$ 
 $\frac {\partial \#1}{\partial \#2}$   $\begin{pmatrix} \#1 \end{pmatrix}$ 
 $\boldsymbol{\#1}$   $\mathcal{\#1}$ 
 $\mathbf{\#1}$   $\mathrm{pmb{\#1}}$   $\varepsilon$   $\lambda$ 
 $\vartheta$   $\alpha$   $\varphi$   $\tagged{\text{\#1}}$ 
 $\tagged*\text{\#1}$   $\tagEqHere{\#2}\href{\#2}\text{\#1}$ 
 $\tagDeHere{\#2}\href{\#2}\text{\#1}$   $\tagEq{\href{\#eq- \#1}}{\text{\#1}}$   $\tagDe{\href{\#de- \#1}}{\text{\#1}}$   $T{\htmlId{eq- \#1}}{\#1}$   $D{\htmlId{de- \#1}}{\vv{\#1}}$   $\mathrm{conv}, \#1$ 
 $\mathrm{cone}, \#1$   $\mathrm{aff}, \#1$   $\mathrm{lin}, \#1$   $\mathrm{span}, \#1$   $\mathrm{O}$   $\mathrm{ri}, \#1$ 
 $\mathrm{rd}, \#1$   $\mathrm{r} \partial, \#1$   $\mathrm{interior}, \#1$   $\mathrm{proj}\{\Pi\}$ 
 $\mathrm{epi}, \#1$   $\mathrm{grad}, \#1$ 
 $\mathrm{grad}T{\mathrm{grad}}^T \#1$   $\mathrm{grad}_x{\mathrm{grad}}_x \#1$ 
 $\mathrm{hess}, \#1$   $\mathrm{hess}_x{\nabla^2_x \#1}$   $\mathrm{jacob}_x{\mathrm{D}_x \#1}$ 
 $\mathrm{jacob}, \#1$   $\mathrm{subdif}, \#1$   $\mathrm{co}, \#1$ 
 $\mathrm{iter}, \#1$   $\mathrm{str}\{^*\}$   $\mathrm{spv}\{\mathrm{mcal} V\}$   $\mathrm{civ}\{\mathrm{mcal} U\}$ 
 $\mathrm{other}, \#1$   $\hat{\#1}$   $\mathrm{xx}\{\mathrm{vv} x\}$   $\mathrm{yy}\{\mathrm{vv} y\}$ 

```

## Teorie sociálního výběru - teorie her o volebních systémech

## Příklad

Máme 15 zaměstnanců - ti si chtějí zvolit nového šefa - a 3 kandidáty \$\$ A,B,C \$\$ Potom preferenční uspořádání jsou

- 7 zaměstnanců:  $\$A > B > C\$$
- 7 zaměstnanců:  $\$B > A > C\$$
- 1 zaměstnanec:  $\$C > A > B\$$

## Přehled bodů:

# people	A	B	C
7	2	1	0
7	1	2	0
1	1	0	2

Celkem má \$A\$ 22 bodů, \$21\$ bodů pro \$B\$ a \$2\$ pro \$C\$

Pokud by ale těch 7 zaměstnanců s 1. \$B\$ chtělo uškodit \$A\$, mohou si změnit preference na \$\$ B > C > A \$\$

To stejné mohou udělat i ti s 1. \$A\$. Potom preferenční uspořádání jsou

- 7 zaměstnanců: \$A > C > B\$
- 7 zaměstnanců: \$B > C > A\$
- 1 zaměstnanec: \$C > A > B\$

Přehled bodů:

# people	A	B	C
7	2	0	1
7	0	2	1
1	1	0	2

Celkem má \$A\$ 15 bodů, \$14\$ bodů pro \$B\$ a \$16\$ pro \$C\$

Označme

- \$N\$ voliče
- \$i\$-tici uspořádání \$(<\_i)\_{i \in N}\$ nazývanou **preferenční uspořádání** na množině \$A\$
- \$A\$ množinu variant

**Preferenční schéma** \$\$ p : N \rightarrow S\_m, \quad |A| = m, \$\$ kde \$S\_m\$ je permutace množiny \$A\$

Dále označme \$P\$ množinu všech preferenčních schémat (pro pevné \$N, A\$).

Náš cíl je najít pevné \$d : P \rightarrow S\_m\$, kde \$d\$ nazýváme **funkcí sociálního rozhodování** \$\$ d((<\_i)\_{i \in N}) = < \$\$ a požadujeme

1.

\$\$ (\forall ( <\_i )\_{i \in N} \in P ) ( \forall a, b \in A ) ( \forall i \in N ) \quad a <\_i b \implies a < b ) \tag{T{FSR-1}} \$\$

2.

\$\$ (\forall ( <\_i )\_{i \in N}, ( \prec\_i )\_{i \in N} \in P ) ( \forall a, b \in A ) \quad \{ i \mid a <\_i b \} = \{ i \mid a\_i \prec\_i b \} \implies ( a < b \text{ iff } a \prec b ) \tag{T{FSR-2}} \$\$

**Definice** \$D\{Dikt\}\$

Dále \$j \in N\$ nazveme **diktátorem**, pokud \$\$ d((<\_i)\_{i \in N}) = <\_j \$\$

## Věta $\mathcal{D}\{\text{Arrow}\}$

Nechť  $n \geq 2$ ,  $n \geq 3$ . Pak libovolná funkce soc. rozhodování má diktátora.

## Příklad

- $m = 2$ ,  $n \geq 2$ , např. většinové pravidlo

$I \subseteq N$  ( $\forall i \in I \quad a \leq_i b \quad (\forall j \in N \setminus I \quad b <_j a$ )  
Je-li  $|I| > \frac{n}{2} \implies a < b$  (a opačně). Při  $n$  sudém dáme na "čestného předsedu"

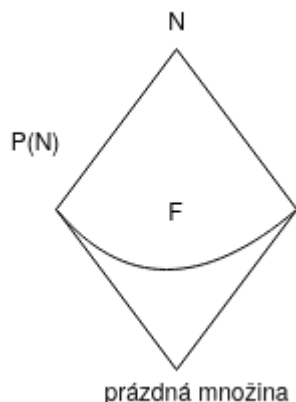
- $m = 2$ ,  $n = 2$ , možnosti

$a \leq_1 b, a \leq_2 b \quad \implies a < b \quad a \leq_1 b, b \leq_2 a \quad \implies a < b, \overbrace{b < a}^{\text{2. diktátor}}, \overbrace{a < b}^{\text{1. diktátor}}, b < a \leq_1 a, a \leq_2 b \quad \implies a < b, \underbrace{a < b}_{\text{2. diktátor}}, \underbrace{b < a}_{\text{1. diktátor}}, b < a \leq_1 a, b \leq_2 a \quad \implies b < a$

## Definice $\mathcal{D}\{\text{Filtr}\}$

Řekneme, že  $\mathcal{F}$  je filtr na množině  $N$ , pokud

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- $F, G \in \mathcal{F} \implies F \cap G \in \mathcal{F}$
- $F \in \mathcal{F}, F \subseteq G \implies G \in \mathcal{F}$



Dále definujeme **hlavní filtr**  $\uparrow_A = \{F \subseteq N \mid a \in F\}$  a **ultrafiltr** - maximální filtr, tj.  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq P(N) \implies \mathcal{G} = \mathcal{F}$

## Lemma $\mathcal{D}\{L1\}$

Filtr  $\mathcal{F}$  na  $N$  je **ultrafiltr**  $\iff \forall F \subseteq N \text{ je } F \in \mathcal{F} \text{ nebo } N \setminus F \in \mathcal{F}$

## Důkaz $\tag{L1}$

Pokud by  $F \notin \mathcal{F}$  a ani  $N \setminus F \in \mathcal{F}$ , pak generujeme  $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \uparrow_F$

Nyní je třeba ukázat, že  $\emptyset \notin \mathcal{G}$ . Kdyby ano, pak by muselo platit  $\emptyset = F \cap G$  pro  $G \in \mathcal{F}$ , pak  $G \subseteq N \setminus F$ , což je spor s  $N \setminus F \notin \mathcal{F}$ .

## Lemma $\mathcal{D}\{L2\}$

Pro libovolnou konečnou množinu  $N$  je každý ultrafiltr hlavní.

Podmnožina  $F \subseteq N$  **přehrává**  $F'$ , typicky  $F' = N \setminus F$ , ve dvojici  $a, b \in A$ , platí-li  $a \leq_F b$ ,  $a \leq_{F'} b \implies a < b$ , kde pod  $a \leq_F b$  myslíme  $(\forall i \in F) \quad a \leq_i b$

## Lemma $\mathcal{D}\{L3\}$

Pokud  $F$  přehrává  $F' = N \setminus F$  pro  $d \in a, b$  a  $x, y$  jsou libovolné  $x, y \in A \implies F$  přehrává  $F'$  i v  $x, y$

“ Tedy pokud umí vynutit  $a < b$  pro nějakou dvojici, umí to pro všechny dvojice

## Důkaz $\text{tagDe}\{L3\}$

Uvažujme  $c \leq_F a \leq_F b$  a také  $b \leq_{F'} c \leq_{F'} a$  (preferenční schéma musí být připravené pro všechny situace).

Pak ale podle  $\text{tagEq}\{\text{FSR-1}\}$  musí být  $c < a$ , ale také  $a < b$  podle předpokladů. Celkem máme, že  $c < a < b$ .

Nyní vezměme libovolná  $c \leq_F, \leq_{F'}$  splňující  $c \leq_F b, b \leq_F c$ , pak dostaneme  $c < b$ , protože výsledek  $d$  nezávisí na  $a$  podle  $\text{tagEq}\{\text{FSR-2}\}$ . Jinak řečeno  $F$  přehrává  $F'$  i v  $c, b$ .

Duálně nahradíme  $b$  nějakým  $e$  a stejně se dostaneme k  $x, y$

Zde  $F$  nazveme **rozhodující (vládnoucí) rodina** pro  $d$

## Lemma $\mathcal{D}\{L4\}$

Pro  $n \geq 2, m \geq 3$  je množina všech vládnoucích rodin **ultrafiltr** na  $N$

## Důkaz $\text{tagDe}\{L4\}$

Nechť  $F$  je vládnoucí rodina a platí  $F \subseteq G \subseteq N \implies G$  je vládnoucí rodina. Mějme  $a, b, c \in A$  s  $F \subseteq G \subseteq N$  a požadujeme

1.  $a \leq_{N-G} c \leq_{N-G} b$
2.  $a \leq_{G-F} b \leq_{G-F} c$
3.  $b \leq_F a \leq_F c$

Z  $\text{tagEq}\{\text{FSR-1}\}$  víme, že  $a < c$ . Navíc  $G$  přehrává  $G'$  v  $b, c$  a také  $F$  je vládnoucí rodina a 3. víme, že  $b < a < c$ .

Celkem tedy  $G$  přehrává  $G'$  v  $b, c$  a tedy  $G$  je vládnoucí.

Dokažme, že  $F$  je **ultrafiltr** a tedy  $\emptyset \neq F \subseteq N \implies F \text{ nebo } F' \text{ je vl. rodina}$ , tj.  $b \leq_{F'} a$ ,  $a \leq_F b$ , pak

- $a < b \implies F$  je vl.
- $b < a \implies F'$  je vl.

Ukažme nyní uzavřenost na průniky. Nechtě  $\emptyset \neq F, G \subseteq N$  a  $F, G$  vládnoucí  $\implies F \cap G$  vládnoucí. Vezměme nyní  $b \leq_{N \setminus (F \cup G)} c \leq_{N \setminus (F \cup G)} a$   $g \leq_{F \setminus G} a \leq_{F \setminus G} c$   $c \leq_{G \setminus F} b \leq_{G \setminus F} a$   $q \leq_{F \cap G} c \leq_{F \cap G} b$ ,  $z$  čehož dohromady víme z

- $F = (F \cap G) \cup (F \setminus G)$ , že  $a < c$
- $G = (F \cap G) \cup (G \setminus F)$ , že  $c < b$

Celkem  $a < c < b \implies a < b$ , tedy  $F \cap G$  je vládnoucí pro  $a, b$

## Důkaz $\text{tagDe}\{\text{Arrow}\}$

Jelikož  $\text{mcal } F = \uparrow_j \implies \text{set}\{j\}$  je vládnoucí a tedy  $j$  je **diktátor**.

Revision #3

Created 17 April 2023 06:03:03 by Sceptri

Updated 24 April 2023 06:04:22 by Sceptri