Teorie sociálního výběru

$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\lVert #1 \right\rVert} \xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&}\xdef\AND{\quad \and \quad}\xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}} \xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix}#1\end{pmatrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mcal#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}}\xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\a{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})} \xdef\tagged*#1{\text{#1}} \xdef\tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}} \xdef\tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}} \xdef\tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}\, #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}\, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\, #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\, #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}\, #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}\, #1} \xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1} \xdef\hess#1{\nabla^2\, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1} \xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}\, #1} \xdef\iter#1{^{[#1]}} \xdef\str{^*} \xdef\spv{\mcal V} \xdef\civ{\mcal U} \xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv x} \xdef\yy{\vv y} $$

> Teorie sociálního výběru - teorie her o volebních systémech

Příklad

Máme 15 zaměstnanců - ti si chtějí zvolit nového šéfa - a 3 kandidáty $$ A,B,C $$ Potom prefereční uspořádání jsou

- 7 zaměstnanců: $A > B > C$
- 7 zaměstnanců: $B > A > C$
- 1 zaměstnanec: $C > A > B$

Přehled bodů:

# people	A	B	C
7	2	1	0
7	1	2	0
1	1	0	2

Celkem má A 22 bodů, 21 bodů pro B a 2 pro C

Pokud by ale těch 7 zaměstnanců s 1. B chtělo uškodit A, mohou si změnit preference na $$ B > C > A $$

To stejné mohou udělat i ti s 1. A. Potom prefereční uspořádání jsou

- 7 zaměstnanců: $A > C > B$
- 7 zaměstnanců: $B > C > A$
- 1 zaměstnanec: $C > A > B$

Přehled bodů:

# people	A	B	C
7	2	0	1
7	0	2	1
1	1	0	2

Celkem má A 15 bodů, 14 bodů pro B a 16 pro C

Označme

- N voliče
- i-tici uspořádání $(<_i)_{i \in N}$ nazývanou **preferenční uspořádání** na množině A
- A množinu variant

Preferenční schéma $$ p : N \to S_m, \quad |A| = m, $$ kde S_m je permutace množiny A

Dále označme P množinu všech preferenčních schémat (pro pevné N,A).

Náš cíl je najít pevné $d : P \to S_m$, kde d nazýváme **funkcí sociálního rozhodování** $$ d((<_i)_{i \in N}) = < $$ a požadujeme

1.
$$(\forall (<_i)_{i \in N} \in P) (\forall a,b \in A) (\forall i \in N) \quad a <_i b \implies a < b \tag{\T{FSR-1}}$$

2.
$$(\forall (<_i)_{i \in N}, (\prec_i)_{i \in N} \in P)(\forall a,b \in A) \quad \set{i | a <_i b} = \set{i | a_i \prec_i b} \implies (a < b \iff a \prec b) \tag{\T{FSR-2}}$$

Definice $\D{Dikt}$

Dále $j \in N$ nazveme **diktátorem**, pokud $$ d((<_i)_{i \in N}) = <_j $$

Věta $\D{Arrow}$

Nechť $n \geq 2, n \geq 3$. Pak libovolná funkce soc. rozhodování má diktátora.

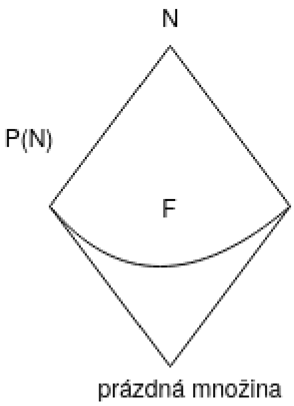
Příklad

1. $m = 2, n \geq 2$, např. většinové pravidlo
   $$I \subseteq N (\forall i \in I) \quad a <_i b \ (\forall j \in N \setminus I) \quad b <_j a$$
   Je-li $|I| > \frac n 2 \implies a < b$ (a opačně). Při n sudém dáme na "čestného předsedu"
2. $m = 2, n = 2$, možnosti
   $$a <_1 b, a <_2 b \quad \implies a < b\ a <_1 b, b <_2 a\quad \implies a < b,\overbrace{b < a}^{\text{2. diktátor}}, \overbrace{a < b}^{\text{1. diktátor}}, b < a\ b <_1 a, a <_2 b\quad \implies a < b, \underbrace{a < b}_{\text{2. diktátor}}, \underbrace{b < a}_{\text{1. diktátor}}, b < a \ b <_1 a, b <_2 a \quad \implies b < a $$

Definice $\D{Filtr}$

Řekneme, že $\mcal F$ je filtr na množině N, pokud

- $\emptyset \notin \mcal F$
- $F, G \in \mcal F \implies F \cap G \in \mcal F$
- $F \in \mcal F, F \subseteq G \implies G \in \mcal F$



Dále definujme **hlavní filtr** $$ \uparrow_A = \set{F \subseteq N | a \in F} $$ a **ultrafiltr** - maximální filtr, tj. $$ \mcal F \subseteq \mcal G \subseteq P(N) \implies \mcal G = \mcal F $$

Lemma $\D{L1}$

Filtr $\mcal F$ na N je **ultrafiltr** $\iff$ $$ \forall F \subseteq N \text{ je } F \in \mcal F \text{ nebo } N \setminus F \in \mcal F $$

Důkaz $\tagDe{L1}$

Pokud by $F \notin \mcal F$ a ani $N \setminus F \in \mcal F$, pak generujme $\mcal G = \mcal F \cup \uparrow_F$

Nyní je třeba ukázat, že $\emptyset \notin \mcal G$. Kdyby ano, pak by muselo platit $\emptyset = F \cap G$ pro $G \in \mcal F$, pak $G \subseteq N \setminus F$, což je spor s $N - F \notin \mcal G$.

Lemma $\D{L2}$

Pro libovolnou konečnou množinu N je každý ultrafiltr hlavní.

Podmnožina $F\subseteq N$ **přehrává** F', typicky $F' = N \setminus F$, ve dvojici $a,b \in A$, platí-li $$ a <_F b, a <_{F'} b \implies a < b, $$ kde pod $a <_F b$ myslíme $(\forall i \in F) \quad a <_i b$

Lemma $\D{L3}$

Pokud F přehrává $F' = N \setminus F$ pro d v a,b a x,y jsou libovolné $x,y \in A \implies$ F přehrává F' i v x,y

> Tedy pokud umí vynutit $a < b$ pro nějakou dvojici, umí to pro všechny dvojice

Důkaz $\tagDe{L3}$

Uvažujme $c <_F a <_F b$ a také $b <_{F'} c <_{F'} a$ (preferenční schéma musí být připravené pro všechny situace).
Pak ale podle $\tagEq{FSR-1}$ musí být $c < a$, ale také $a < b$ podle předpokladů. Celkem máme, že $c < a < b$.

Nyní vezměme libovolná $<_F, <_{F'}$ splňující $c <_F b, b <_F c$, pak dostaneme $c < b$, protože výsledek d nezávisí na a podle $\tagEq{FSR-2}$. Jinak řečeno F přehrává F' i v c,b.

Duálně nahradíme b nějakým e a stejně se dostaneme k x,y

Zde F nazveme **rozhodující (vládnoucí) rodina** pro d

Lemma $\D{L4}$

Pro $n \geq 2, m \geq 3$ je množina všech vládnoucích rodin **ultrafiltr** na N

Důkaz $\tagDe{L4}$

Nechť F je vládnoucí rodina a platí $F \subseteq G \subseteq N \implies G$ je vládnoucí rodina.
Mějme $a,b,c \in A$ s $F \subset G \subset N$ a požadujme

1. $a <_{N-G} c <_{N-G} b$
2. $a <_{G-F} b <_{G-F} c$
3. $b <_F a <_F c$

Z $\tagEq{FSR-1}$ víme, že $a<c$. Navíc G přehrává G' v b,c a také F je vládnoucí rodina a 3. víme, že $b < a < c$.

Celkem tedy G přehrává G' v b,c a tedy G je vládnoucí.

Dokažme, že F je **ultrafiltr** a tedy $$ \emptyset \neq F \subset N \implies F \text{ nebo } F' \text{ je vl. rodina}, $$ tj. $b <_{F'} a, a <_F b$, pak

- $a<b \implies F$ je vl.
- $b < a \implies F'$ je vl.

Ukažme nyní uzavřenost na průniky. Nechť $$ \emptyset \neq F,G \subset N $$ a F,G vládnoucí $\implies F \cap G$ vládnoucí. Vezměme nyní $$ b <_{N \setminus (F \cup G)} c <_{N \setminus (F \cup G)} a \ g <_{F \setminus G} a <_{F \setminus G} c \ c <_{G \setminus F} b <_{G \setminus F} a \ q <_{F \cap G} c <_{F \cap G} b, $$ z čehož dohromady víme z

- $F = (F \cap G) \cup (F \setminus G)$, že $a < c$
- $G = (F \cap G) \cup (G \setminus F)$, že $c < b$

Celkem $a < c < b \implies a < b$, tedy $F \cap G$ je vládnoucí pro a,b

Důkaz $\tagDe{Arrow}$

Jelikož $\mcal F = \uparrow_j \implies \set{j}$ je vládnoucí a tedy j je **diktátor**.

Revision #3
Created 17 April 2023 06:03:03 by Sceptri
Updated 24 April 2023 06:04:22 by Sceptri