

# Hry v rozšířené formě (poziční hry)

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{\text{#1}}
\xdef\tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{\text{#1}}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{\text{#1}}}
\xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}}
\xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}\, , #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}\, , #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}\, , #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\, , #1}
\xdef\span#1{\mathrm{span}\, , #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\, , #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\, , #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}\, , #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}\, , #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}\, , #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2\, , #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}\, , #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{#1}} \xdef\str{*} \xdef\spv{\mc V} \xdef\civ{\mc U}
\xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv x} \xdef\yy{\vv y} $$
```

“ Také lze nazývat *tahové hry*

## Definice $\mathcal{D}\{H, \mathcal{R}\}$

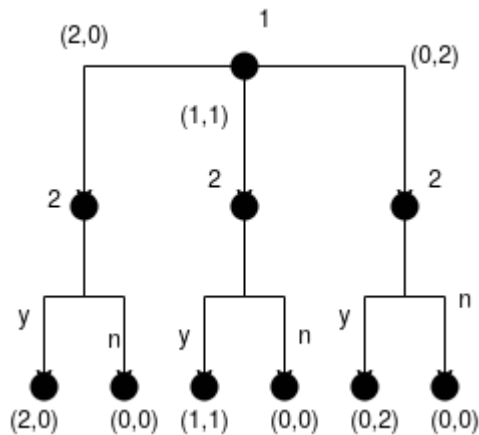
Nechť  $\mathcal{N}$  je množina hráčů,  $\mathcal{H}$  množina **historií**

- prázdná posloupnost  $\forall e \in \mathcal{H}$
- $(a^k)_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ ,  $K \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  je historie  $\implies (a^k)_k$ ,  $k = 1, \dots, L$ ,  $L < K$  je historie
- máme-li  $(a^k)_k$  a víme, že  $\forall L < \infty : (a^k)_k$  je historie, pak i  $(a^k)_k$  je historie

Dále necht  $\mathcal{P}$  je **tahová funkce**,  $\mathcal{P} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{N}$  (nebo také  $\mathcal{P} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{M}(N)$ ), kde  $\mathcal{H}' = \mathcal{H} - \mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{Z}$  jsou **terminální historie**, což jsou maximální posloupnosti v  $\mathcal{H}$  (ty, které neumíme dále rozšířit).

Pak výherní funkce má tvar  $u_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$  nebo může být zadáno pouze preferenční uspořádání  $\succsim_i$  na  $Z$

## Příklad



Zde  $N = \{1, 2\}$ ,  $P(\varnothing) = 1$  a  $P((0,2)) = P((1,1)) = P((2,0)) = 2$  a také  $u_1((1,1), y) = 1$ . Množina historií má tvar  $H = \{\varnothing, (2,0), (1,1), (0,2), ((2,0), y), ((2,0), n), \dots\}$

Strategie pro prvního hráče  $X = \{(2,0), (1,1), (0,2)\}$  a pro druhého hráče  $Y = \{(2,0), y, (2,0), n, \dots\}$

Obecně zapsáno strategie pro  $i$ -tého hráče je množina  $X_i = \{f : \bar{H} \rightarrow H \mid \bar{H} = \{\bar{h} \in H \mid P(\bar{h}) = i\}, \bar{h} \text{ je podposloupnost } f(\bar{h}) \text{ bez posledního členu}\}$

### Nashova rovnováha:

Máme výherní funkci  $u_i(\bar{f}_i, \hat{f}_i) \geq u_i(f_i, \hat{f}_i)$ , tj.  $i$  volí nejlepší odpověď na  $\hat{f}_i$ . Pak  $(\bar{f}_i)_{i \in N}$  je rovnováha.

Dále definujeme podhru hry  $(N, H, P, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$  jako  $(N, H \mid_h, P \mid_h, (X_i \mid_h)_{i \in N}, (u_i \mid_h)_{i \in N})$ , kde  $h \in H$  pevná historie a  $h' \in H \mid_h$  iff  $(h, h') \in H$ . Dále

- $P \mid_h(h') = P(h, h')$
- $f' \in X_i \mid_h$  iff  $(\exists f \in X_i) (\forall \bar{h} \in \bar{H} \mid_h) \quad (h, f'(\bar{h})) = f(h, \bar{h})$
- $u_i \mid_h(h') = u_i(h, h')$

Situace  $(f_i)_{i \in N}$  je **perfektní podherní rovnováha (PPR)**, je-li takto zvolené  $(f_i \mid_h)_{i \in N}$  (Nashovou) rovnováhou pro každou historii  $h$ .

## Pokračování příkladu

Rovnováha  $\left((1,1), \begin{pmatrix} (2,0) \mapsto ((2,0), n) \\ (1,1) \mapsto ((1,1), y) \\ (0,2) \mapsto ((0,2), n) \end{pmatrix} \right)$ , což ale **není perfektní podherní rovnováha**, neboť se

zde  $(0,2) \mapsto ((0,2), n)$  rozhodl špatně, jinak řečeno  $H \mid_h \sqsubset u_2((0,2), n) < u_2((0,2), y)$

Tedy **perfektní podherní rovnováha** je v tomto případě  $\left( (1,1), \begin{matrix} (2,0) \\ (2,0), n \end{matrix} \mapsto (1,1) \mapsto (1,1), y \mapsto (0,2) \mapsto (0,2), y \end{matrix} \right)$ , ale také  $\left( (1,1), \begin{matrix} (2,0) \\ (2,0), y \end{matrix} \mapsto (1,1) \mapsto (1,1), y \mapsto (0,2) \mapsto (0,2), y \end{matrix} \right)$

### Lemma $\mathcal{D}\{L1\}$

Nechť  $G = (N, H, P, \bigcup X, \bigcup U)$  je hra v rozšířené formě s konečným horizontem (všechny historie jsou konečné). Pak situace  $(f_i)_{i \in N}$  je **PPR**  $\iff \forall i \in N, \forall h \in H, \forall P(h) = i \implies u_i((f_i \mid h)_{i \in N}) \geq u_i(\tilde{f}_i, (f_j \mid h)_{j \in \hat{i}})$ , kde  $\tilde{f}_i \in H \mid h$  se liší od  $f_i \mid h$  pouze akcemi po  $h$

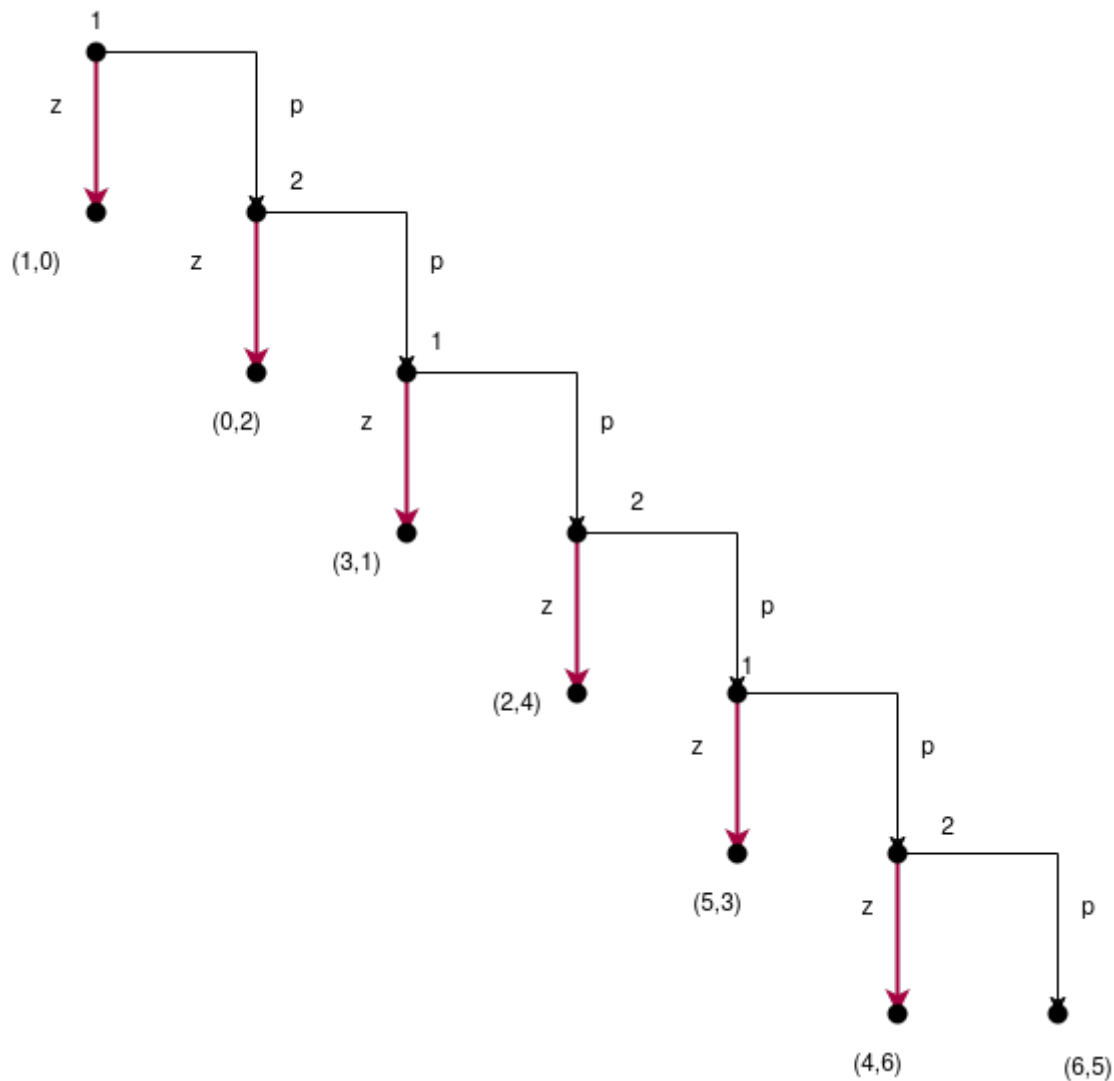
## Věta $\mathcal{D}\{V1\}$

Je-li  $G = (N, H, P, \{X_i\}_{i \in N}, \{U_i\}_{i \in N})$  konečná hra v rozšířené formě (tj. má konečný horizont a v každém vrcholu se rozhodujeme z konečně mnoha variant, tj.  $H$  je konečná), pak existuje **PPR**\*.

Dále tuto tematiku rozšiřují tzv. folkové věty.

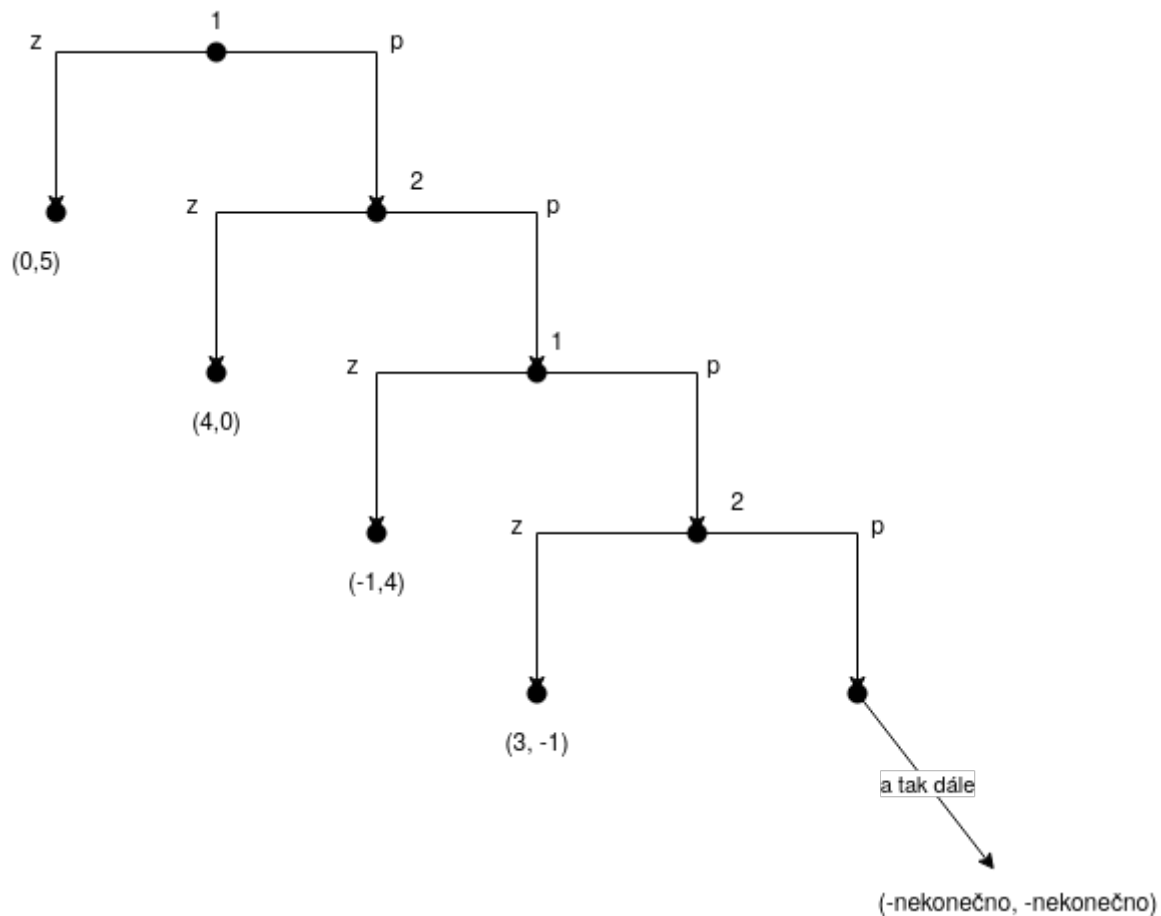
## Příklad: Stonožka

Máme 2 hráče  $N = \{1, 2\}$



A  $f_1 = \begin{pmatrix} \vee & \mapsto (z) & \mapsto (p,p) & \mapsto (p,p,z) & \mapsto (p,p,p,p) & \mapsto (p,p,p,p,z) \\ \end{pmatrix}$  a  $f_2 = (\dots)$  analogicky.

Příklad: Dražba s placením



Tedy  $\overbrace{\{ \text{mtr} \{ (-\infty, -\infty) \} \cup \{ (4,0) \} \} }^{(p, \dots, p), \quad (z, \dots, z)}$ , kde  $(4,0)$  je rovnováha a  $(0,5)$

Revision #3

Created 24 April 2023 06:04:05 by Sceptri

Updated 15 May 2023 06:05:51 by Sceptri