

Hry v rozšířené formě (poziční hry)

```

 $\$ \def \scal#1#2{\angle #1, #2 \rangle \def \norm#1{\left\| \text{rVert} #1 \right\|}$ 
 $\def \dist{\rho} \def \and{\&} \def \AND{\quad \text{and} \quad} \def \brackets#1{\left\{ #1 \right\}}$ 
 $\def \parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \def \mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}$ 
 $\def \bm#1{\boldsymbol{#1}} \def \mcal#1{\mathcal{#1}}$ 
 $\def \vv#1{\mathbf{#1}} \def \vvp#1{\pmb{#1}} \def \ve{\varepsilon} \def \l{\lambda}$ 
 $\def \th{\vartheta} \def \a{\alpha} \def \vf{\varphi} \def \Tagged#1{(\text{#1})}$ 
 $\def \tagged*#1{\text{#1}} \def \tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}}$ 
 $\def \tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \def \tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}}$ 
 $\def \tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \def \T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}}$ 
 $\def \D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}}$ 
 $\def \conv#1{\mathrm{conv}\,, #1}$ 
 $\def \cone#1{\mathrm{cone}\,, #1}$ 
 $\def \aff#1{\mathrm{aff}\,, #1}$ 
 $\def \lin#1{\mathrm{Lin}\,, #1}$ 
 $\def \span#1{\mathrm{span}\,, #1}$ 
 $\def \O{\mathcal O}$ 
 $\def \ri#1{\mathrm{ri}\,, #1}$ 
 $\def \rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1}$ 
 $\def \interior#1{\mathrm{int}\,, #1}$ 
 $\def \proj{\Pi}$ 
 $\def \epi#1{\mathrm{epi}\,, #1}$ 
 $\def \grad#1{\mathrm{grad}\,, #1}$ 
 $\def \gradT#1{\mathrm{grad}^T #1}$ 
 $\def \gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}$ 
 $\def \hess#1{\nabla^2\,, #1}$ 
 $\def \hessx#1{\nabla^2_x #1}$ 
 $\def \jacobx#1{D_x #1}$ 
 $\def \jacob#1{D #1}$ 
 $\def \subdif#1{\partial #1}$ 
 $\def \co#1{\mathrm{co}\,, #1}$ 
 $\def \iter#1{\wedge^{[#1]}}$ 
 $\def \str{\wedge}$ 
 $\def \spv{\mathcal V}$ 
 $\def \civ{\mathcal U}$ 
 $\def \other#1{\hat{#1}}$ 
 $\def \xx{\vv x}$ 
 $\def \yy{\vv y}$ 
 $\$$ 

```

„Také lze nazývat *tahové hry*

Definition $\mathcal{D}\{\text{HvRF}\}$

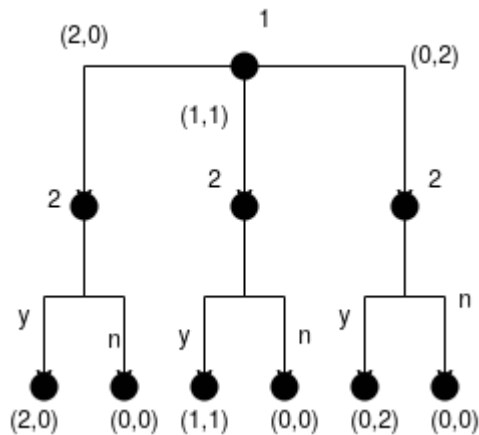
Nechť N je množina hráčů, H množina **historií**

- prázdná posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^\infty$
- $\{a_k\}_{k=1}^K$, $K \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ je historie $\implies \{a_k\}_{k=1}^L$, $L < K$ je historie
- máme-li $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ a víme, že $\forall L < \infty : \{a_k\}_{k=1}^L$ je historie, pak i $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ je historie

Dále nechť P je **tahová funkce**, $P : H' \rightarrow N$ (nebo také $P : H' \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{P}(N))$), kde $H' = H - Z$, Z jsou **terminální historie**, což jsou maximální posloupnosti v H (ty, které neumíme dále rozšířit).

Pak výherní funkce má tvar $u_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$ nebo může být zadáno pouze preferenční uspořádání \succsim_i na Z

Příklad



Zde $N = \{1, 2\}$, $P(i) = 1$ a $P((0,2)) = P((1,1)) = P((2,0)) = 2$ a také $u_1((1,1), y) = 1$. Množina historií má tvar $H = \{i, (2,0), (1,1), (0,2), ((2,0), y), ((2,0), n), \dots\}$

Strategie pro prvního hráče $X = \{(2,0), (1,1), (0,2)\}$ a pro druhého hráče $Y = \{(2,0), y, (2,0), n, \dots\}$

Obecně zapsáno strategie pro i -tého hráče je množina $X_i = \{f : \bar{H} \rightarrow H \mid \bar{H} = \{\bar{h} \in H \mid P(\bar{h}) = i\}, \bar{h} \text{ je podposloupnost } f(\bar{h}) \text{ bez posledního členu}\}$

Nashova rovnováha:

Máme výherní funkci $u_i(\bar{f}_i, f_{-i}) \geq u_i(f_i, f_{-i})$, tj. i volí nejlepší odpověď na f_{-i} . Pak $(\bar{f}_i)_{i \in N}$ je rovnováha.

Dále definujeme podhru hry $(N, H, P, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ jako $(N, H \mid_h, P \mid_h, (X_i \mid_h)_{i \in N}, (u_i \mid_h)_{i \in N})$, kde $h \in H$ pevná historie a $h' \in H \mid_h$ iff $(h, h') \in H$. Dále

- $P \mid_h(h') = P(h, h')$
- $f' \in X_i \mid_h$ iff $(\exists f \in X_i) (\forall \bar{h} \in \bar{H} \mid_h) (h, f'(\bar{h})) = f(h, \bar{h})$
- $u_i \mid_h(h') = u_i(h, h')$

Situace $(f_i)_{i \in N}$ je **perfektní podherní rovnováha (PPR)**, je-li takto zvolené $(f_i \mid_h)_{i \in N}$ (Nashovou) rovnováhou pro každou historii h .

Pokračování příkladu

Rovnováha $\left((1,1), \begin{pmatrix} (2,0) \mapsto ((2,0), n) \\ (1,1) \mapsto ((1,1), y) \\ (0,2) \mapsto ((0,2), n) \end{pmatrix} \right)$, což ale **není perfektní podherní rovnováha**, neboť se

zde $(0,2) \mapsto ((0,2), n)$ rozhodl špatně, jinak řečeno $H \mid_h \sqcup u_2((0,2), n) < u_2((0,2), y)$

Tedy **perfektní podherní rovnováha** je v tomto případě $\left((1,1), \begin{matrix} (2,0) \\ \mapsto ((2,0), n) \end{matrix} \mid (1,1) \mapsto ((1,1), y) \mid (0,2) \mapsto ((0,2), y) \end{matrix} \right)$, ale také $\left((1,1), \begin{matrix} (2,0) \mapsto ((2,0), y) \mid (1,1) \mapsto ((1,1), y) \mid (0,2) \mapsto ((0,2), y) \end{matrix} \right)$

Lemma $\mathcal{D}\{L1\}$

Nechť $G = (N, H, P, \mathcal{X}, \mathcal{U})$ je hra v rozšířené formě s konečným horizontem (všechny historie jsou konečné). Pak situace $(f_i)_{i \in N}$ je **PPR** $\iff \forall i \in N, \forall h \in H, \forall i \in N, P(h) = i \implies u_i((f_i \mid_h)_{i \in N}) \geq u_i(\tilde{f}_i, (f_j \mid_h)_{j \in \hat{i}})$, kde $\tilde{f}_i \in H \mid_h$ se liší od $f_i \mid_h$ pouze akcemi po h

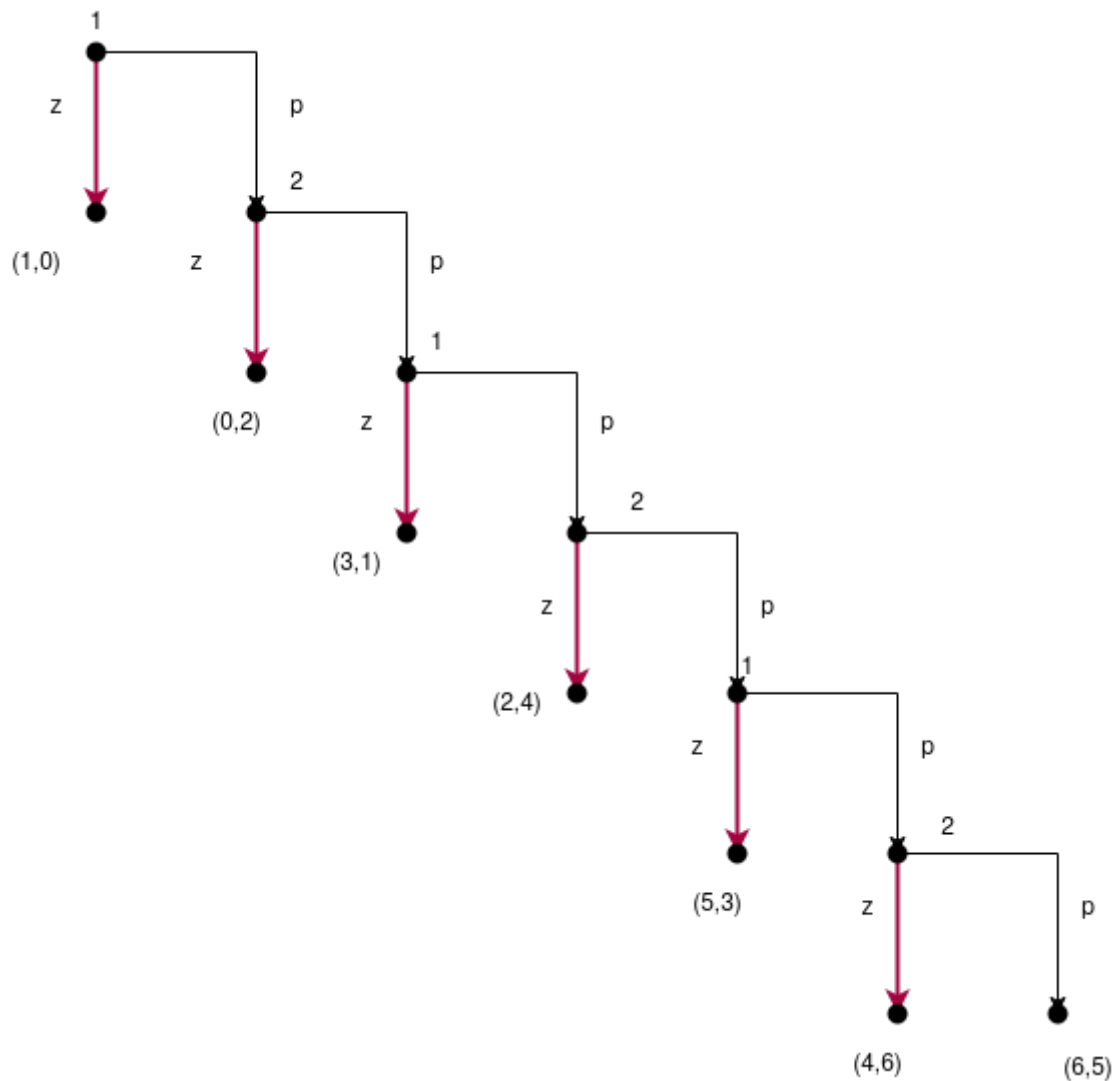
Věta $\mathcal{D}\{V1\}$

Je-li $G = (N, H, P, \mathcal{X}, \mathcal{U})$ konečná hra v rozšířené formě (tj. má konečný horizont a v každém vrcholu se rozhodujeme z konečně mnoha variant, tj. H je konečná), pak existuje **PPR***.

Dále tuto tematiku rozšiřují tzv. folkové věty.

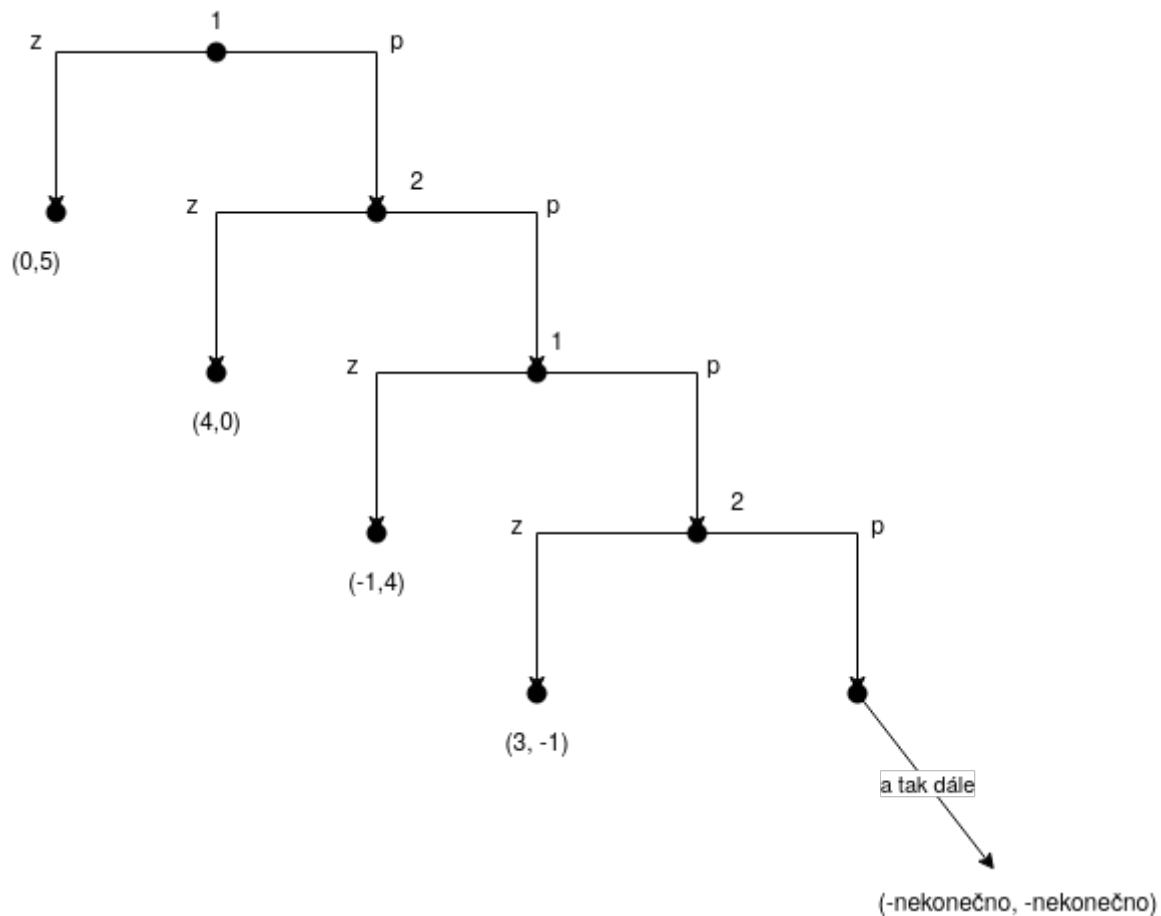
Příklad: Stonožka

Máme 2 hráče $N = \{1,2\}$



A $f_1 = \begin{pmatrix} \vee & \mapsto (z) & \mapsto (p,p) & \mapsto (p,p,z) & \mapsto (p,p,p,p) & \mapsto (p,p,p,p,z) \\ \end{pmatrix}$ a $f_2 = (\dots)$ analogicky.

Příklad: Dražba s placením



Tedy $\overbrace{\{ \text{mtr} \{ (-\infty, -\infty) \} \cup \{ (4,0) \} \cup \{ (0,5) \} \}}^{(p, \dots, p), \quad (z, \dots, z)}$, kde $(4,0)$ je rovnováha a $(0,5)$

Revision #3

Created 24 April 2023 06:04:05 by Sceptri

Updated 15 May 2023 06:05:51 by Sceptri