

Hry v rozšířené formě (poziční hry)

```

 $\xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle}$   $\xdef\norm#1{\left\| \text{#1} \right\|}$ 
 $\xdef\dist{\rho}$   $\xdef\and{\&}$   $\xdef\AND{\quad \text{and} \quad}$   $\xdef\brackets#1{\left\{ \text{#1} \right\}}$ 
 $\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}}$   $\xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} \text{#1} \end{pmatrix}}$ 
 $\xdef\bm#1{\boldsymbol{\text{#1}}}$   $\xdef\mc#1{\mathcal{\text{#1}}}$ 
 $\xdef\vv#1{\mathbf{\text{#1}}}$   $\xdef\vp#1{\pmb{\text{#1}}}$   $\xdef\ve{\varepsilon}$   $\xdef\l{\lambda}$ 
 $\xdef\th{\vartheta}$   $\xdef\alpha{\alpha}$   $\xdef\vf{\varphi}$   $\xdef\Tagged#1{\text{\text{#1}}}$ 
 $\xdef\tagged*#1{\text{\text{#1}}}$   $\xdef\tagEqHere#1#2{\href{\text{\text{#2}}}{\text{\text{#1}}}}$ 
 $\xdef\tagDeHere#1#2{\href{\text{\text{#2}}}{\text{\text{#1}}}}$   $\xdef\tagEq#1{\href{\text{\text{#1}}}{\text{\text{#1}}}}$ 
 $\xdef\tagDe#1{\href{\text{\text{#1}}}{\text{\text{#1}}}}$   $\xdef\T#1{\text{\text{#1}}}$ 
 $\xdef\D#1{\text{\text{#1}}}$   $\xdef\conv#1{\text{\text{#1}}}$   $\xdef\cone#1{\text{\text{#1}}}$ 
 $\xdef\aff#1{\text{\text{#1}}}$   $\xdef\lin#1{\text{\text{#1}}}$   $\xdef\span#1{\text{\text{#1}}}$ 
 $\xdef\O{\mathcal O}$   $\xdef\ri#1{\text{\text{#1}}}$ 
 $\xdef\rd#1{\text{\text{#1}}}$   $\xdef\interior#1{\text{\text{#1}}}$   $\xdef\proj{\Pi}$ 
 $\xdef\epi#1{\text{\text{#1}}}$   $\xdef\grad#1{\text{\text{#1}}}$ 
 $\xdef\gradT#1{\text{\text{#1}}}$   $\xdef\gradx#1{\text{\text{#1}}}$ 
 $\xdef\hess#1{\nabla^2 \text{\text{#1}}}$   $\xdef\hessx#1{\nabla^2_x \text{\text{#1}}}$   $\xdef\jacobx#1{D_x \text{\text{#1}}}$ 
 $\xdef\jacob#1{D \text{\text{#1}}}$   $\xdef\subdif#1{\partial \text{\text{#1}}}$   $\xdef\co#1{\text{\text{#1}}}$ 
 $\xdef\iter#1{\text{\text{#1}}}$   $\xdef\str{*}$   $\xdef\spv{\mathcal V}$   $\xdef\civ{\mathcal U}$ 
 $\xdef\other#1{\text{\text{#1}}}$   $\xdef\xx{\text{\text{#1}}}$   $\xdef\yy{\text{\text{#1}}}$ 

```

☞ Také lze nazývat *tahové hry*

Definice \mathcal{H}^{RF}

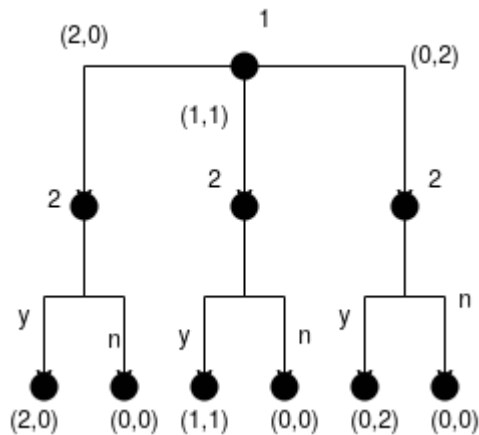
Nechť \mathcal{N} je množina hráčů, \mathcal{H} množina **historií**

- prázdná posloupnost $\emptyset \in \mathcal{H}$
- $(a^k)_{k=1}^K$, $K \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ je historie $\implies (a^k)_{k=1}^L$, $L < K$ je historie
- máme-li $(a^k)_{k=1}^{\infty}$ a víme, že $\forall L < \infty : (a^k)_{k=1}^L$ je historie, pak i $(a^k)_{k=1}^{\infty}$ je historie

Dále nechť \mathcal{P} je **tahová funkce**, $\mathcal{P} : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{N}$ (nebo také $\mathcal{P} : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{N})$), kde $\mathcal{H}' = \mathcal{H} - \mathcal{Z}$, \mathcal{Z} jsou **terminální historie**, což jsou maximální posloupnosti v \mathcal{H} (ty, které neumíme dále rozšířit).

Pak výherní funkce má tvar $u_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$ nebo může být zadáno pouze preferenční uspořádání \succsim_i na Z

Příklad



Zde $N = \{1, 2\}$, $P(\varnothing) = 1$ a $P((0,2)) = P((1,1)) = P((2,0)) = 2$ a také $u_1((1,1), y) = 1$. Množina historií má tvar $H = \{\varnothing, (2,0), (1,1), (0,2), ((2,0), y), ((2,0), n), \dots\}$

Strategie pro prvního hráče $X = \{(2,0), (1,1), (0,2)\}$ a pro druhého hráče $Y = \{(2,0), y, (2,0), n, \dots\}$

Obecně zapsáno strategie pro i -tého hráče je množina $X_i = \{f : \bar{H} \rightarrow H \mid \bar{H} = \{\bar{h} \in H \mid P(\bar{h}) = i\}, \bar{h} \text{ je podposloupnost } f(\bar{h}) \text{ bez posledního členu}\}$

Nashova rovnováha:

Máme výherní funkci $u_i(\bar{f}_i, f_{-\hat{i}}) \geq u_i(f_i, f_{-\hat{i}})$, tj. i volí nejlepší odpověď na $f_{-\hat{i}}$. Pak $(\bar{f}_i)_{i \in N}$ je rovnováha.

Dále definujeme podhru hry $(N, H, P, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ jako $(N, H \mid_h, P \mid_h, (X_i \mid_h)_{i \in N}, (u_i \mid_h)_{i \in N})$, kde $h \in H$ pevná historie a $h' \in H \mid_h$ iff $(h, h') \in H$. Dále

- $P \mid_h(h') = P(h, h')$
- $f' \in X_i \mid_h$ iff $(\exists f \in X_i) (\forall \bar{h} \in \bar{H} \mid_h) \quad (h, f'(\bar{h})) = f(h, \bar{h})$
- $u_i \mid_h(h') = u_i(h, h')$

Situace $(f_i)_{i \in N}$ je **perfektní podherní rovnováha (PPR)**, je-li takto zvolené $(f_i \mid_h)_{i \in N}$ (Nashovou) rovnováhou pro každou historii h .

Pokračování příkladu

Rovnováha $\left((1,1), \begin{pmatrix} (2,0) \mapsto ((2,0), n) \\ (1,1) \mapsto ((1,1), y) \\ (0,2) \mapsto ((0,2), n) \end{pmatrix} \right)$, což ale **není perfektní podherní rovnováha**, neboť se

zde $(0,2) \mapsto ((0,2), n)$ rozhodl špatně, jinak řečeno $H \mid_h \sqcup u_2((0,2), n) < u_2((0,2), y)$

Tedy **perfektní podherní rovnováha** je v tomto případě $\left((1,1), \begin{matrix} (2,0) \\ \mapsto ((2,0), n) \end{matrix} \mid (1,1) \mapsto ((1,1), y) \mid (0,2) \mapsto ((0,2), y) \end{matrix} \right)$, ale také $\left((1,1), \begin{matrix} (2,0) \mapsto ((2,0), y) \mid (1,1) \mapsto ((1,1), y) \mid (0,2) \mapsto ((0,2), y) \end{matrix} \right)$

Lemma $\mathcal{D}\{L1\}$

Nechť $G = (N, H, P, \mathcal{X}, \mathcal{U})$ je hra v rozšířené formě s konečným horizontem (všechny historie jsou konečné). Pak situace $(f_i)_{i \in N}$ je **PPR** $\iff \forall i \in N, \forall h \in H, \forall i \in N, P(h) = i \implies u_i((f_i \mid_h)_{i \in N}) \geq u_i(\tilde{f}_i, (f_j \mid_h)_{j \in \hat{i}})$, kde $\tilde{f}_i \in H \mid_h$ se liší od $f_i \mid_h$ pouze akcemi po h

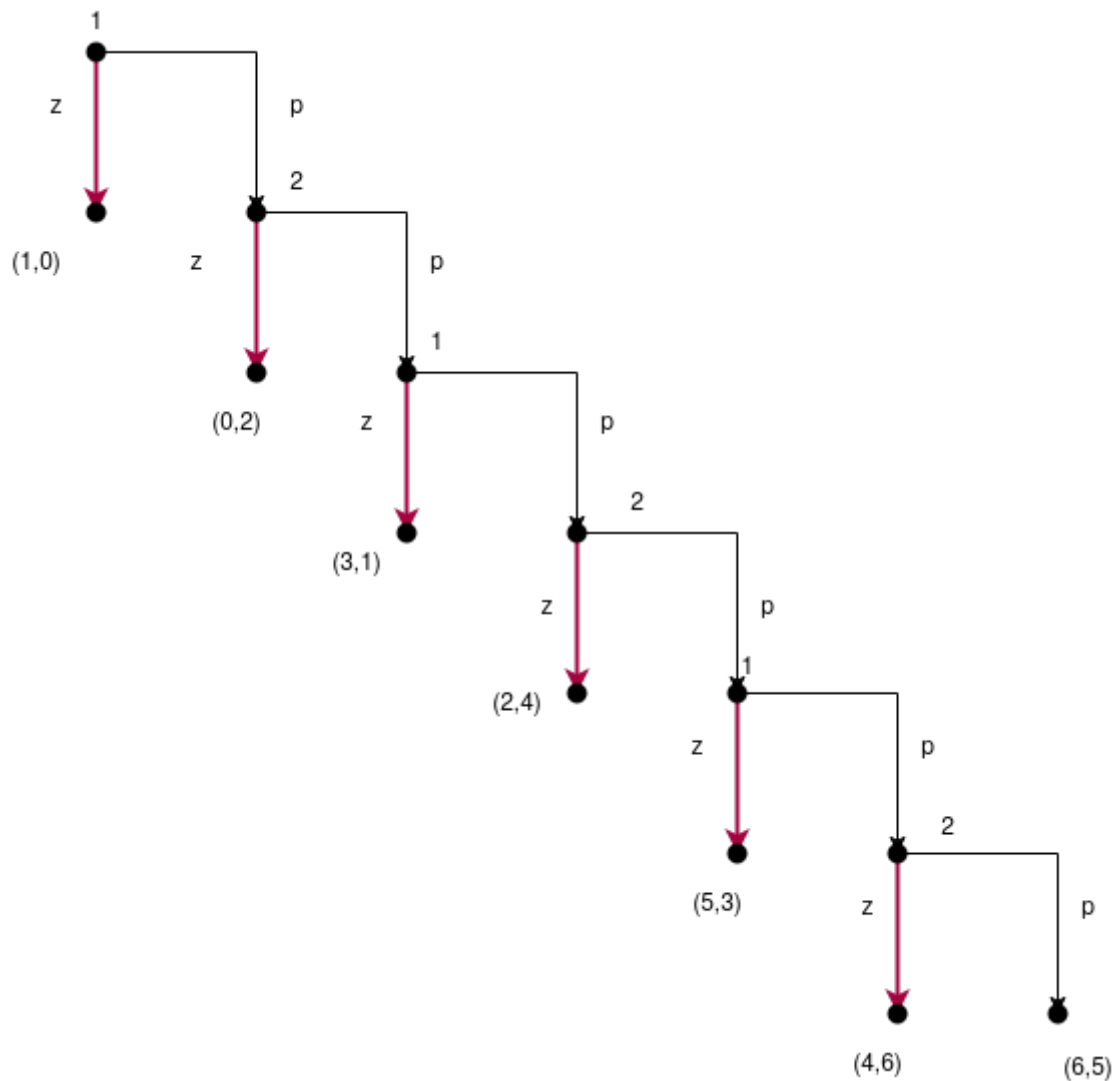
Věta $\mathcal{D}\{V1\}$

Je-li $G = (N, H, P, \mathcal{X}, \mathcal{U})$ konečná hra v rozšířené formě (tj. má konečný horizont a v každém vrcholu se rozhodujeme z konečně mnoha variant, tj. H je konečná), pak existuje **PPR***.

Dále tuto tematiku rozšiřují tzv. folkové věty.

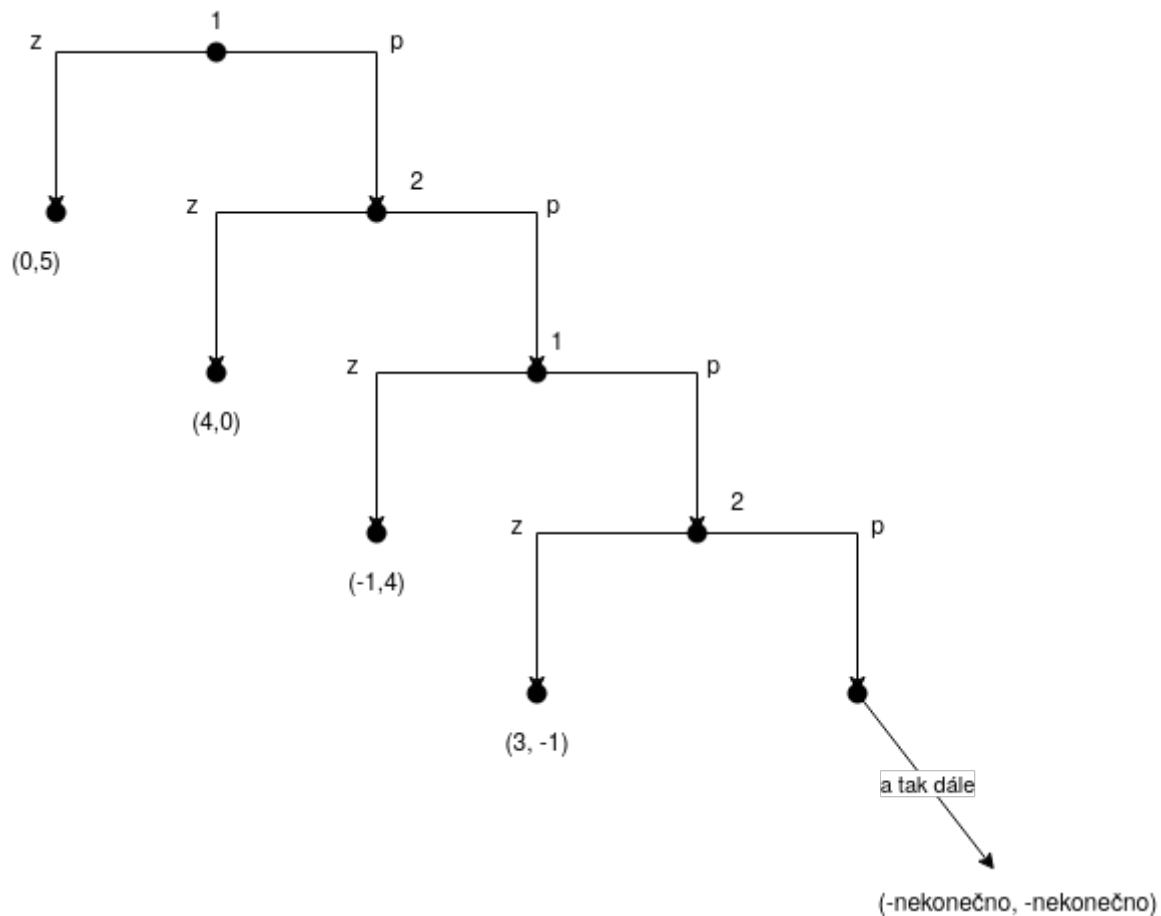
Příklad: Stonožka

Máme 2 hráče $N = \{1,2\}$



A $f_1 = \begin{pmatrix} \vee & \mapsto (z) & \mapsto (p,p) & \mapsto (p,p,z) & \mapsto (p,p,p,p) & \mapsto (p,p,p,p,z) \\ \end{pmatrix}$ a $f_2 = (\dots)$ analogicky.

Příklad: Dražba s placením



Tedy $\overbrace{\{ \text{mtr} \{ (-\infty, -\infty) \} \cup \{ (4,0) \} \cup \{ (0,5) \} \}}^{(p, \dots, p), \quad (z, \dots, z)}$, kde $(4,0)$ je rovnováha a $(0,5)$

Revision #3

Created 24 April 2023 06:04:05 by Sceptri

Updated 15 May 2023 06:05:51 by Sceptri