

# 8. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\|Vert #1 \right\|rVert}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-
#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlld{eq-
#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}\,, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}\,, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}\,, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\,,
#1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\,, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\,, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}\,, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}\,, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}\,, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2\,, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}\,, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{[#1]}} \xdef\str{\wedge^*} \xdef\spv{\mc{V}} \xdef\civ{\mc{U}}
\xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv{x}} \xdef\yy{\vv{y}} $$
```

## Pokračování her ve tvaru charakteristické funkce

### Věta $\mathcal{D}\{\text{KER}\}$

Pro libovolnou hru  $v$  platí  $C(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall S \subseteq U) \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}$ , kde  $C(v)$  je **jádro**.

### Definice ( $\mathcal{D}\{\text{NM}\}$ -řešení)

Označme  $V \subseteq E(v)$  s vlastnostmi

- $x, y \in V \implies x \not\prec y$
- $x \in E(v) \setminus V \implies \exists y \in V : x \prec y$

Pak  $V$  nazveme **NM-řešením**. Pod  $E(v)$  myslíme množinu rozdělení.

Je to jistým způsobem alternativa k jádru

Hru nazveme **symetrickou**, pokud  $v(S)$  je funkcí  $|S|$ .

## Příklad

Mějme 3 hráče, 2 se domluví a 3. hráč jim musí zaplatit korunu každému. Jistě  $v(\emptyset) = 0$  a  $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = -2$  Také  $v(\{1,2\}) = \dots = 2$  a jako poslední  $v(\{1,2,3\}) = 0$

Počítejme pro  $C(v)$ :  $x_1 + x_2 \geq 2 \wedge x_1 + x_3 \geq 2 \wedge x_2 + x_3 \geq 2$  celkem  $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 6 \wedge x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$ , ale  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ , což je spor, tedy je jádro prázdné.

Naopak NM-řešeními jsou  $\{(1, 1, -2), (1, -2, 1), (-2, 1, 1)\}$  Zkontroluje **ne**-dominování mezi situacemi, např.  $(1, 1, -2) \not\prec (1, -2, 1)$

“ Zde při dominování si musí polepšit všichni hráči

Toto můžeme splnit koalicí  $SS$ , ale ta podle pidgeon-hole principle nemůže být 2 ani 3 prvková, stejně přijdeme na to, že si 1 prvková koalice nic nezaručuje, tedy ani ona nebude fungovat. Tedy se tyto strategie nedominují.

Ověřme nyní druhou podmínku  $(x,y,z) \notin V$ , **BÚNO** předpokládejme  $x \leq y \leq z$ , přičemž jistě  $x = 2 - y - z$ . Pak pro

- $y > 1$ , pak ale  $y + z > 2$ , tedy  $x < -2$ , ale potom  $(x,y,z) \notin E(v)$  (stejná situace nastane pro  $y = 1$  a  $z > y$ )
- $y = z = 1 \implies x = -2 \implies (x,y,z) \in V$
- $y < 1, z < 1$ , pak ale  $(x,y,z) \prec (-2, 1, 1)$
- $y < 1, z \geq 1$ , pak tuto situaci dominuje  $(1,1, -2)$

## Shapleyho vektor

Vezměme  $V$  - všechny hry ve tvaru charakteristické funkce ( $n$  hráči) - a chceme funkci  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$

Máme několik požadavků na takovou funkci (na **Shapleyho vektor**)

- $\varphi_i(\pi v) = \varphi_{\pi^{-1}(i)}(v)$ , kde  $\pi v$  je hra vzniklá permutací  $\pi$  na množině hráčů
- $\varphi_i(u + v) = \varphi_i(u) + \varphi_i(v)$ , kde platí  $(u + v)(S) = u(S) + v(S)$

3.  $\alpha > 0 : \forall_i (\alpha v) = \alpha \forall_i (v), \tag{T{S3}}$  kde  $(\alpha v)(S) = \alpha v(S)$
4. Pokud  $S \subseteq N$  obsahuje všechny podstatné hráče, pak  $v(S) = \sum_{i \in S} \forall_i (v)$ , kde  $i$  nazveme **podstatným hráčem**, pokud  $\exists S \subseteq N, i \notin S : v(S, \{i\}) > v(S) + v(\{i\}) \tag{T{S4}}$

$\sum_{i \in N} \forall_i (v) = v(N)$  Je-li  $i$ -tý hráč **nepodstatný**, pak  $\forall_i (v) = v(\{i\})$

## Věta D{Shapleyho}

Existuje jediná funkce  $v : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  splňující axiomy  $\tag{S1} - \tag{S4}$  uvedené výše a to  $\forall_i (v) = \sum_{i \in T \subseteq N} \frac{(|T| - 1)! (n - |T|)!}{n!} \text{Big}(v(T) - v(T - \{i\}))$

## Lemma D{LS1}

Nechť  $w_S$  je hra  $w_S(T) = \begin{cases} 1, & S \subseteq T \setminus \emptyset, \\ \text{jinak}, & \end{cases}$  pak platí  $\forall_i (w_S) = \begin{cases} \frac{1}{|S|}, & i \in S \setminus \emptyset, \\ 0, & i \notin S \end{cases}$

## Důkaz D{LS1}

Hráč je podstatný  $\iff i \in S$ . Proto  $\implies \sum_{i \in S} \forall_i (w_S) = 1$  Pripustíme  $\forall_i (w_S) \neq \forall_j (w_S), i, j \in S$ . Zvolíme  $\pi = (i, j)$ , což ale dává spor s  $\tag{S1}$ .

## Lemma D{LS2}

Nechť  $v \in V$  a  $\emptyset \neq S \subseteq N$  a definujeme  $c_S = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} v(T)$ , kde  $s = |S|, t = |T|$ . Potom  $v = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} c_S w_S$

## Důkaz D{LS2}

Zvolme koalici  $\emptyset \neq U \subseteq N$  a  $\sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} c_S w_S(U) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} \sum_{\emptyset \neq T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} v(T) w_S(U)$

Jelikož  $w_S(U) = 1 \iff S \subseteq U$ , pak  $= \sum_{\emptyset \neq T \subseteq U} \sum_{T \subseteq S \subseteq U} (-1)^{|S|-|T|} v(T) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq U} \left( \sum_{s=|T|}^{|U|} \binom{|U|-|T|}{s-|T|} (-1)^{s-|T|} \right) v(T) = \underbrace{\left( \sum_{i=0}^{|U|-|T|} \binom{|U|-|T|}{i} (-1)^i \right)}_{(1-1)^{|U|-|T|} = 0 \text{ pro } |T| \leq |U| - 1} v(T) \blacksquare$

“ Lemma D{LS2} dává jednoznačnost z D{Shapleyho} věty.

## Důkaz $\text{DeShapleyho}$ věty

Počítejme 
$$\varphi_i(v) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} c_S \varphi_i(w_S) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} c_S \frac{1}{s} = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} \frac{1}{s} \sum_{\emptyset \neq T \subseteq S} (-1)^{s-t} v(T) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \sum_{T \subseteq S \subseteq N} \frac{(-1)^{s-t}}{s} v(T) = \sum_{i \in T} \gamma_i(T) (v(T) - v(T \setminus \{i\})),$$
 kde 
$$\gamma_i(T) = \sum_{T \cup \{i\} \subseteq S \subseteq N} \frac{(-1)^{s-t}}{s}$$

Počítejme 
$$\gamma_i(T) = \sum_{s=t}^n \frac{(-1)^{s-t}}{s} \binom{n-t}{s-t} = \sum_{s=t}^n (-1)^{s-t} \binom{n-t}{s-t} \int_0^1 x^{s-1} dx = \int_0^1 x^{t-1} \underbrace{\left( \sum_{s=t}^n (-1)^{s-t} \binom{n-t}{s-t} x^{s-t} \right)}_{\sum_{j=0}^{n-t} (-1)^j \binom{n-t}{j} x^j = (1-x)^{n-t}} dx = \int_0^1 x^{t-1} (1-x)^{n-t} dx = \text{per partes} \dots = \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}$$

“ 
$$\int_0^1 x^{t-1} (1-x)^{n-t} dx = \frac{1}{n} x^t (1-x)^{n-t} - \int_0^1 \frac{1}{n} t x^t (-1) (1-x)^{n-t-1} dx = \frac{1}{n} t \left( x^t (1-x)^{n-t} + \int_0^1 x^t (1-x)^{n-t-1} dx \right)$$
 ”

“ Shapleyho vektor se **nemusí** nacházet v jádře

## Pokračování příkladu s NM-řešením

$$\varphi_1(v) = \sum_{1 \in T \subseteq N} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} (v(T) - v(T \setminus \{1\})) = \frac{0! 2! 3!}{3!} (-2) + 2 \cdot \frac{1! 1! 3!}{3!} (2 - (-2)) + \frac{2! 0! 3!}{3!} (0 - 2) = \frac{1}{3!} (-4 + 8 - 4) = 0$$

Revision #6

Created 3 April 2023 06:05:05 by Sceptri

Updated 14 May 2023 07:39:14 by Sceptri