

# 7. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right.\rVert}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}}
\xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1}
\xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1} \xdef\O{\mathcal O}
\xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1}
\xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{#1}} \xdef\str{\^*} \xdef\spv{\mc V} \xdef\civ{\mc U}
\xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv x} \xdef\yy{\vv y} $$
```

## Teorie užitečnosti

Nechť  $\mathcal{U}$  je množina událostí, která je seřazená podle toho, jak jsou pro nás užitečné. Množinu  $\mathcal{U}$  rozšíříme o konvexní kombinace  $r_1 A_1 + \dots + r_n A_n$ , kde  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$  a  $r_1, \dots, r_n \geq 0$  s  $r_1 + \dots + r_n = 1$ .

Relace  $A \prec B$  znamená, že  $B$  upřednostňuji před  $A$ .  $A \parallel B$  znamená, že žádnou událost neupřednostňuji.

### Axiomy teorie užitečnosti $\mathcal{D}\{\text{AXT}\}$

- $\forall A, B$  nastane právě jedna možnost  $A \succ B, A \prec B, A \parallel B$
- $(\mathcal{T}\{U_2\})$ :  $\parallel$  je relace ekvivalence
- $(\mathcal{T}\{U_3\})$ : je tranzitivní
- $(\mathcal{T}\{U_4\})$ :  $A \prec B \parallel C \implies A \prec C$  a  $A \parallel B \prec C \implies A \prec C$
- $(\mathcal{T}\{U_5\})$ :  $1 \cdot A + 0 \cdot B = A$

- $(T6)$ :  $r_1 A_1 + \dots + r_n A_n = r_{\sigma_1} A_{\sigma_1} + \dots + r_{\sigma_n} A_{\sigma_n}$  pro libovolnou permutaci  $\sigma \in S(n)$
- $(T7)$ :  $rA + (1-r)(sB + (1-s)C) = rA + (1-r)sB + (1-r)(1-s)C$
- $(T8)$ :  $rA + (1-r)A = A$
- $(T9)$ :  $A \parallel C$  a vezmeme  $r \in [0,1]$ ,  $B \in \mathcal{U} \implies rA + (1-r)B \parallel rC + (1-r)B$
- $(T10)$ :  $A \prec C$ ,  $r > 0$ ,  $B \in \mathcal{U} \implies rA + (1-r)B \prec rC + (1-r)B$
- $(T11)$ :  $A \prec B \prec C \implies \exists r \in [0,1] : rA + (1-r)C \parallel B$

## Věta $(DTEU)$

Existuje  $u : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  tak, že pro  $\forall A, B \in \mathcal{U}$ ,  $r \in [0,1]$ :  $u(A) < u(B) \iff A \prec B$  a navíc platí

- $u(rA + (1-r)B) = ru(A) + (1-r)u(B)$
- je-li  $v$  jiná taková funkce, pak platí  $\forall A \in \mathcal{U} : v(A) = \alpha u(A) + \beta$ , kde  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$

## Lemma $(DTUL)$

Pokud  $B \prec A$  a máme  $0 \leq s \leq r \leq 1$ , pak

1.  $sA + (1-s)B \preceq rA + (1-r)B$
2.  $B \prec C \prec A$ ,  $r \in (0,1) : rA + (1-r)B \parallel C$ , pak  $r$  je určeno jednoznačně

## Důkaz $(\tag{DTUL})$

1.  $sA + (1-s)\left(\frac{r-s}{1-s}A + \frac{1-r}{1-s}B\right) = \frac{r-s}{1-s}A + (1-r)B = \frac{r-s}{1-s}rA + \frac{r-s}{1-s}rA + (1-r)B = \frac{r-s}{1-s}rA + (1-r)B$  a podle  $(T8)$  platí  $B = \frac{r-s}{1-s}B + \frac{1-r}{1-s}B \prec \frac{r-s}{1-s}A + \frac{1-r}{1-s}A$  a celkem podle  $(T10)$  dostáváme  $rA + (1-r)B \succ sA + (1-s)B$
2. Mějme  $r, s$  a  $rA + (1-r)B \parallel sA + (1-s)B$ , což je spor s  $(DTUL)/1$  a navíc
  - $r = 0 \implies B \parallel C$  spor
  - $r = 1 \implies A \parallel C$  spor

## Důkaz $(\tag{TEU})$

Vezměme události  $E, F \in \mathcal{U}$ ,  $E \prec F$ . Uvážíme  $A \in \mathcal{U}$ , pak nastane některá z možností

- $F \prec A$
- $F \parallel A$

- $E \preceq A \preceq F$
- $E \parallel A$
- $A \preceq E$

“ Kdyby takové  $E, F$  neexistovalo, pak  $E \parallel F$  a pro libovolná  $E, F$  a mohli bychom volit  $u \equiv 0$

Klademe respektive podle možností výše  $u(A) = \frac{1}{r}, 1, s, 0, \frac{t-1}{t}$ , kde

- $(1-s)E + sF \parallel A$
- $rA + (1-r)E \parallel F$
- $tA + (1-t)F \parallel E$

Nyní zvolíme  $B \in \mathcal{U}$  a vyšetříme 25 možností pozice  $A, B$  vůči  $E, F$ , např.  $E \preceq A, B \preceq F$

Pak  $(1-s_1)E + s_1F \parallel A \parallel (1-s_2)E + s_2F \parallel B$  a tedy  $u(A) = s_1$  a  $u(B) = s_2$ . Předpokládejme  $s_1 = s_2$ , pak podle vztahu výše a  $\tag{U2}$ , tj.  $A \parallel B$ . Nyní předp.  $s_1 < s_2$ , pak z  $\tag{TUL}$  dostáváme  $A \preceq B$ . Naopak z  $s_1 > s_2$  plyne  $A \succ B$ .

# Hry ve tvaru charakteristické funkce

“ Hráči jsou poslanci a mají vytvořit vládní koalici - Snaha hráče je vždy dostat se koalice, která má šanci vyhrát

Mějme výherní funkci  $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $N = \{1, \dots, n\}$  je množina všech hráčů a  $2^N$  je **množina všech koalic** ( $\mathcal{P}(N)$ ) a tedy pro  $S \subseteq N, \emptyset \neq S$   $v(S) \in \mathbb{R}$

Požadujeme

1.  $v(\emptyset) = 0$  **personálnost**
2.  $S, T \subseteq N, S \cap T = \emptyset \implies v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$  **superaditivita**
3. **Rozdělení**  $x \in \mathbb{R}^N$ 
  1.  $x_1 + \dots + x_n = v(N)$

$$2. \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

Množinu všech rozdělení hry  $v$  označme  $E(v)$

$$4. \text{Podstata } \sum_{i \in N} v(\{i\}) < v(N)$$

5. Značme

$x \preceq_S y$ , což čteme jako: rozdělení  $x$  je dominované rozdělením  $y$  pro koalici  $S$

$$1. (\forall i \in S): x_i < y_i \quad \text{and} \quad \sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$$

Navíc píšeme  $x \preceq y$ , pokud existuje koalice  $S$  tak, že  $x \preceq_S y$

6. **jádro** - Množina všech nedominovaných rozdělení, značíme  $C(v)$ .

Lze ukázat, že jádro je složeno z rozdělení, kde každá koalice dostane alespoň tolik, kolik si sama zaručí, tj.  $x \in C(v) \iff (\forall S \subseteq N): \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$

## Příklad

Mějme  $N = \{1, 2, \dots, 2k = n\}$ , přičemž lichý hráč má levou botu a pravý hráč má pravou botu - výhra  $v(S)$  koalice  $S$  je pak počet funkčních párů bot, co jsou schopni dát dohromady

$$1. v(\{i\}) = 0$$

$$2. v(\{1, 2\}) = 1$$

$$3. v(\{1, 2, 3\}) = 1$$

$$4. v(\{1, 3\}) = 0$$

Jelikož  $v(\{2m-1, 2m\}) = 1$ , pak  $v(N) = \sum_{m=1}^k v(\{2m-1, 2m\})$ , tedy jistě pro libovolné  $x$  musí platit  $x_{2m-1} + x_{2m} = 1$

Navíc i pro čtveřice musí platit  $x_1 + x_4 = 1 \wedge x_2 + x_3 = 1$

Celkem tedy mám soustavu  $x_1 + x_2 \wedge x_1 + x_4 = 1 \wedge x_2 + x_3 = 1 \wedge x_3 + x_4 = 1 \implies x_1 = x_3 \wedge x_2 = x_4$

A proto  $x \in C(v) \iff x = (a, 1-a, a, 1-a, \dots)$

Revision #10

Created 27 March 2023 06:04:06 by Sceptri

Updated 6 June 2025 18:44:45 by Sceptri