

7. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}}
\xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1}
\xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{#1}} \xdef\str{\^*} \xdef\spv{\mc V} \xdef\civ{\mc U}
\xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv x} \xdef\yy{\vv y} $$
```

Teorie užitečnosti

Nechť \mathcal{U} je množina událostí, která je seřazená podle toho, jak jsou pro nás užitečné. Množinu \mathcal{U} rozšíříme o konvexní kombinace $r_1 A_1 + \dots + r_n A_n$, kde $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$ a $r_1, \dots, r_n \geq 0$ s $r_1 + \dots + r_n = 1$.

Relace $A \preceq B$ znamená, že B upřednostňuji před A . $A \parallel B$ znamená, že žádnou událost neupřednostňuji.

Axiomy teorie užitečnosti $\mathcal{D}\{\text{AXT}\}$

- $\forall A, B$ nastane právě jedna možnost $A \succ B, A \preceq B, A \parallel B$
- (\mathcal{U}) : \parallel je relace ekvivalence
- (\mathcal{U}_3) : je tranzitivní
- (\mathcal{U}_4) : $A \preceq B \parallel C \implies A \preceq C$ a $A \parallel B \preceq C \implies A \preceq C$
- (\mathcal{U}_5) : $1 \cdot A + 0 \cdot B = A$

- $(T6)$: $r_1 A_1 + \dots + r_n A_n = r_{\sigma_1} A_{\sigma_1} + \dots + r_{\sigma_n} A_{\sigma_n}$ pro libovolnou permutaci $\sigma \in S(n)$
- $(T7)$: $rA + (1-r)(sB + (1-s)C) = rA + (1-r)sB + (1-r)(1-s)C$
- $(T8)$: $rA + (1-r)A = A$
- $(T9)$: $A \parallel C$ a vezmeme $r \in [0,1]$, $B \in \mathcal{U} \implies rA + (1-r)B \parallel rC + (1-r)B$
- $(T10)$: $A \prec C$, $r > 0$, $B \in \mathcal{U} \implies rA + (1-r)B \prec rC + (1-r)B$
- $(T11)$: $A \prec B \prec C \implies \exists r \in [0,1] : rA + (1-r)C \parallel B$

Věta $(DTEU)$

Existuje $u : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že pro $\forall A, B \in \mathcal{U}$, $r \in [0,1]$: $u(A) < u(B) \iff A \prec B$ a navíc platí

- $u(rA + (1-r)B) = ru(A) + (1-r)u(B)$
- je-li v jiná taková funkce, pak platí $\forall A \in \mathcal{U} : v(A) = \alpha u(A) + \beta$, kde $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$

Lemma $(DTUL)$

Pokud $B \prec A$ a máme $0 \leq s \leq r \leq 1$, pak

1. $sA + (1-s)B \preceq rA + (1-r)B$
2. $B \prec C \prec A$, $r \in (0,1) : rA + (1-r)B \parallel C$, pak r je určeno jednoznačně

Důkaz (\tagDe{TUL})

1. $sA + (1-s)\left(\frac{r-s}{1-s}A + \frac{1-r}{1-s}B\right) = (r-s)A + (1-r)B = \left(\frac{s}{r}\right)\left(\frac{r-s}{1-s}A + \frac{1-r}{1-s}B\right) + (1-r)B = rA + (1-r)B$ a podle $(T8)$ platí $B = \frac{r-s}{1-s}B + \frac{1-r}{1-s}B \prec \left(\frac{s}{r}\right)\left(\frac{r-s}{1-s}A + \frac{1-r}{1-s}B\right) + \frac{1-r}{1-s}A + \frac{1-r}{1-s}B$ a celkem podle $(T10)$ dostáváme $rA + (1-r)B \succ sA + (1-s)B$
2. Mějme r, s a $rA + (1-r)B \parallel sA + (1-s)B$, což je spor s $(\tagDe{TUL})/1$ a navíc
 - $r = 0 \implies B \parallel C$ spor
 - $r = 1 \implies A \parallel C$ spor

Důkaz (\tagDe{TEU})

Vezměme události $E, F \in \mathcal{U}$, $E \prec F$. Uvážíme $A \in \mathcal{U}$, pak nastane některá z možností

- $F \prec A$
- $F \parallel A$

- $E \preceq A \preceq F$
- $E \parallel A$
- $A \preceq E$

“ Kdyby takové E, F neexistovalo, pak $E \parallel F$ a pro libovolná E, F a mohli bychom volit $u \equiv 0$

Klademe respektive podle možností výše $u(A) = \frac{1}{r}, 1, s, 0, \frac{t-1}{t}$, kde

- $(1-s)E + sF \parallel A$
- $rA + (1-r)E \parallel F$
- $tA + (1-t)F \parallel E$

Nyní zvolíme $B \in \mathcal{U}$ a vyšetříme 25 možností pozice A, B vůči E, F , např. $E \preceq A, B \preceq F$

Pak $(1-s_1)E + s_1F \parallel A \parallel (1-s_2)E + s_2F \parallel B$ a tedy $u(A) = s_1$ a $u(B) = s_2$. Předpokládejme $s_1 = s_2$, pak podle vztahu výše a $\tag{U2}$, tj. $A \parallel B$. Nyní předp. $s_1 < s_2$, pak z \tag{TUL} dostáváme $A \preceq B$. Naopak z $s_1 > s_2$ plyne $A \succ B$.

Hry ve tvaru charakteristické funkce

“ Hráči jsou poslanci a mají vytvořit vládní koalici - Snaha hráče je vždy dostat se koalice, která má šanci vyhrát

Mějme výherní funkci $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$, kde $N = \{1, \dots, n\}$ je množina všech hráčů a 2^N je **množina všech koalic** ($\mathcal{P}(N)$) a tedy pro $S \subseteq N, \emptyset \neq S$ $v(S) \in \mathbb{R}$

Požadujeme

1. $v(\emptyset) = 0$ **personálnost**
2. $S, T \subseteq N, S \cup T = N \implies v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ **superaditivita**
3. **Rozdělení** $x \in \mathbb{R}^N$
 1. $x_1 + \dots + x_n = v(N)$

$$2. \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

Množinu všech rozdělení hry v označme $E(v)$

$$4. \text{Podstata } \sum_{i \in N} x_i = v(N)$$

5. Značme

$x \preceq_S y$, což čteme jako: rozdělení x je dominované rozdělením y pro koalici S

$$1. (\forall i \in S): x_i < y_i \quad \text{and} \quad \sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$$

Navíc píšeme $x \preceq y$, pokud existuje koalice S tak, že $x \preceq_S y$

6. **jádro** - Množina všech nedominovaných rozdělení, značíme $C(v)$.

Lze ukázat, že jádro je složeno z rozdělení, kde každá koalice dostane alespoň tolik, kolik si sama zaručí, tj. $x \in C(v) \iff (\forall S \subseteq N): \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$

Příklad

Mějme $N = \{1, 2, \dots, 2k = n\}$, přičemž lichý hráč má levou botu a pravý hráč má pravou botu - výhra $v(S)$ koalice S je pak počet funkčních párů bot, co jsou schopni dát dohromady

$$1. v(\{i\}) = 0$$

$$2. v(\{1, 2\}) = 1$$

$$3. v(\{1, 2, 3\}) = 1$$

$$4. v(\{1, 3\}) = 0$$

Jelikož $v(\{2m-1, 2m\}) = 1$, pak $v(N) = \sum_{m=1}^k v(\{2m-1, 2m\})$, tedy jistě pro libovolné x musí platit $x_{2m-1} + x_{2m} = 1$

Navíc i pro čtveřice musí platit $x_1 + x_4 = 1 \wedge x_2 + x_3 = 1$

Celkem tedy mám soustavu $x_1 + x_2 \wedge x_1 + x_4 = 1 \wedge x_2 + x_3 = 1 \wedge x_3 + x_4 = 1 \implies x_1 = x_3 \wedge x_2 = x_4$

A proto $x \in C(v) \iff x = (a, 1-a, a, 1-a, \dots)$

Revision #9

Created 27 March 2023 06:04:06 by Sceptri

Updated 16 May 2023 07:38:26 by Sceptri