

6. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}}
\xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}\,, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}\,, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}\,, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\,, #1}
\xdef\span#1{\mathrm{span}\,, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\,, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}\,, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}\,, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}\,, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2\,, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}\,, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{[#1]}} \xdef\str{\wedge^*} \xdef\spv{\mc V} \xdef\civ{\mc U}
\xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv x} \xdef\yy{\vv y} $$
```

Pokračování

Počítali jsme stacionární vektor \mathbf{x} pro přechodovou matici A , tj. $A \mathbf{x} = \mathbf{x}$

Mějme počáteční pravděpodobnostní vektor \mathbf{x}_0 $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} p_0 q_0 & p_0(1 - q_0) & (1 - p_0) q_0 & (1 - p_0)(1 - q_0) \end{pmatrix}$ A jistě $\mathbf{x}_1 = A \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A \mathbf{x}_1 = A^2 \mathbf{x}_0$
Navíc $w(\mathbf{x}_0 + \delta A \mathbf{x}_0 + \delta^2 A^2 \mathbf{x}_0 + \dots) = w(E + \delta A + \delta^2 A^2 + \dots) \mathbf{x}_0 = w \underbrace{(\overbrace{E - \delta A}^{-1})}^{-1} \mathbf{x}_0 = \mathbf{y}$, což je tedy $\mathbf{y} = B^{-1} \mathbf{x}_0$ $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0$ $\mathbf{y} = \frac{|\cdot|}{|\cdot|}$

A tím pádem dostaneme opět lineární závislost výhry na parametru p_i .

Evoluční algoritmy

| | A | B |
|---|---|-----|
| A | 1 | 2 |
| B | 0 | 1,5 |

A počítejme $\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{5}{3}$ $\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1,5 = 1$

| | | |
|---|--|-----|
| | | 3 |
| | | 2 |
| ↓ | | 3/4 |

Úloha o dohodě

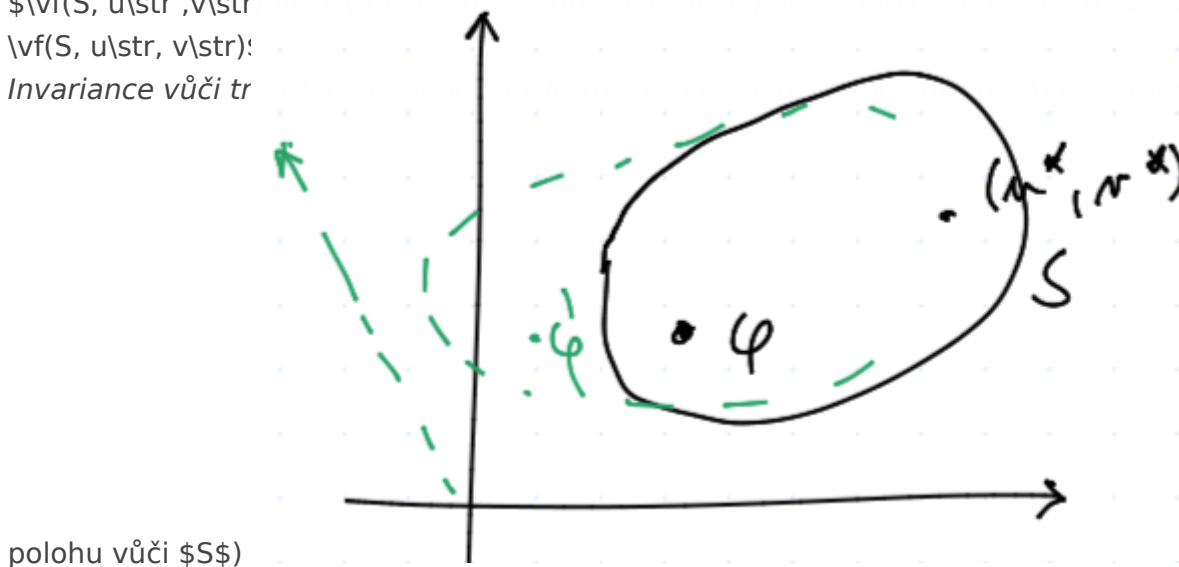
Nechť \mathcal{D} je množina všech úloh o dohodě (pouze hry 2 hráčů) s funkcí $v_f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Dále nechť *úloha* (S, u, v) , kde S je **konvexní a kompaktní podmnožina** v \mathbb{R}^2 a $(u, v) \in S$ je výchozí dvojice výher, která je dána tím, co si hráči zaručí - přičemž hledá optimální situaci

“ S je podmnožina, na které se mohou hráči "hýbat" ”

Požadavky na v_f

1. $\forall (S, u, v) \geq (u, v)$ (bavíme se pouze o výhrách - tzn. cca Paretovská optimalita)
2. $\forall (S, u, v, u) \in S$
3. $(u, v) \in S \wedge (u, v) \geq \forall (S, u, v) \implies (u, v) = \forall (S, u, v)$
4. $\forall (S, u, v) \implies \forall (S, u, v)$
5. Invariance vůči tr



6. S je symetrická vůči ose $x = y$ a $u = v \implies \forall (S, u, v)$ leží na $x = y$
7. $(u, v) \in T \subseteq S \implies \forall (T, u, v) \leq \forall (S, u, v)$

Lze ukázat, že taková funkce \forall splňující 1.-7. **neexistuje**

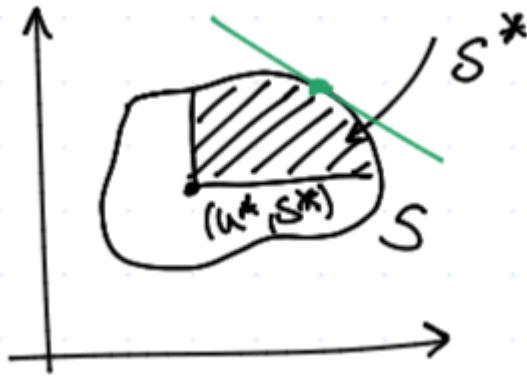
“ Podmínka 7. je velmi silná a pokazí nám to

Věta $\{D\{NASH\}$

Existuje právě jedno \forall splňující 1.-6..

Lemma $\{D\{L1\}$

Nechť $(\exists u, v \in S) \wedge u > u, v > v$, pak existuje jediné maximum funkce $g(u, v) = (u - u)(v - v)$ na množině $S_+ = \{(u, v) \in S \mid u \geq u, v \geq v\}$.



Důkaz

Jistě g je spojitá, S_+ je kompaktní. Lze předpokládat, že $(u^*, v^*) = (0,0)$ (posunutím do počátku). Mějme (u', v') , (u'', v'') maxima g .

Můžeme předpokládat, že $u' > u''$ a jistě i $v' < v''$. Potom $g\left(\frac{u' + u''}{2}, \frac{v' + v''}{2}\right) = \frac{(u' + u'')(v' + v'')}{4} = \frac{u'v' + u''v' + u'v'' + u''v''}{4} > g(u', v') = u'v' = u''v''$ Nerovnost odpovídá $u'v'' + u''v' > u'v' + u''v'' \iff (u' - u'')(v'' - v') > 0$, což ale jistě platí. Tedy jsme našli nové maximum, což je spor. \blacksquare

Lemma $D\{L2\}$

Za předpokladů $\text{tagDe}\{L1\}$ nechť $h(u,v) = (\bar{v} - v)u + (\bar{u} - u)v$, kde (\bar{u}, \bar{v}) je bod, ve kterém se realizuje maximum g z $\text{tagDe}\{L1\}$. Pak pro libovolné $(u,v) \in S$ platí $h(u,v) \leq h(\bar{u}, \bar{v})$.

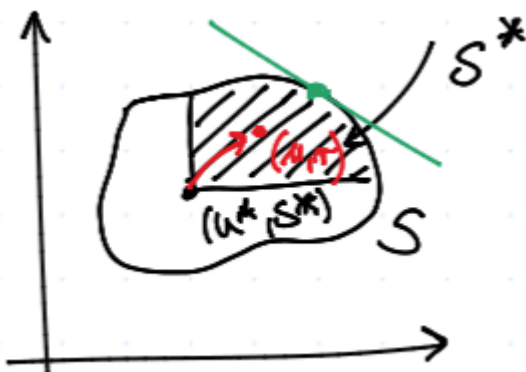
Důkaz

Sporem, nechť $h(u,v) > h(\bar{u}, \bar{v})$ pro nějaké $(u,v) \in S$. Nechť $\epsilon \in (0,1)$ a $(u', v') = (\bar{u}, \bar{v}) + \epsilon((u,v) - (\bar{u}, \bar{v}))$. Pak ale $h(u - \bar{u}, v - \bar{v}) = h(u,v) - h(\bar{u}, \bar{v}) > 0$. Nyní dosadíme $g(u', v') = (\bar{u} - \epsilon(u - \bar{u}))(\bar{v} - \epsilon(v - \bar{v})) - \epsilon(u - \bar{u})(\bar{v} - \bar{v}) + \epsilon(\bar{u} - u)(\bar{v} - v) = \epsilon^2(u - \bar{u})(v - \bar{v})$. A derivací podle ϵ $0 < \alpha + \beta \epsilon + \gamma \epsilon^2 \rightarrow \beta + 2\gamma \epsilon$, tedy s růstem ϵ roste derivace na vhodném $(0, \epsilon_0)$. Tedy g je rostoucí, což je spor s $\text{tagDe}\{L1\}$.

Důkaz $\text{tagDe}\{NASH\}$

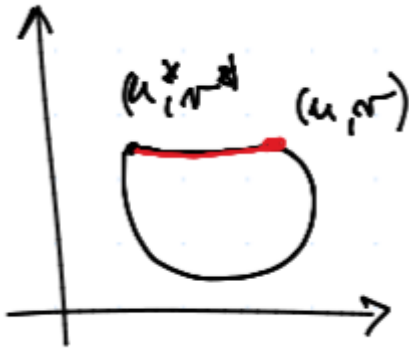
Nastane právě jedna z možností

1. existuje $(u,v) \in S$ takové, že $u > u^*, v > v^*$



Potom vezmeme (\bar{u}, \bar{v}) z $\text{tagDe}\{L1\}$.

2. Neplatí 1., ale existuje $(u, v) \in S$ takové, že $u > u^*$ (a $v = v^*$)



V tomto případě vezmeme $\bar{v} = v^*$ a s \bar{u} jdeme na maximum $(u \in S)$

3. Neplatí 1., ale existuje $(u, v) \in S$ takové, že $v > v^*$ (a $u = u^*$)

$\text{\hspace{3cm}}ANALOGICKY$

4. Neplatí nic, z 1. - 3., tzn. $\bar{u} = u^*$ a $\bar{v} = v^*$. \blacksquare

Příklad

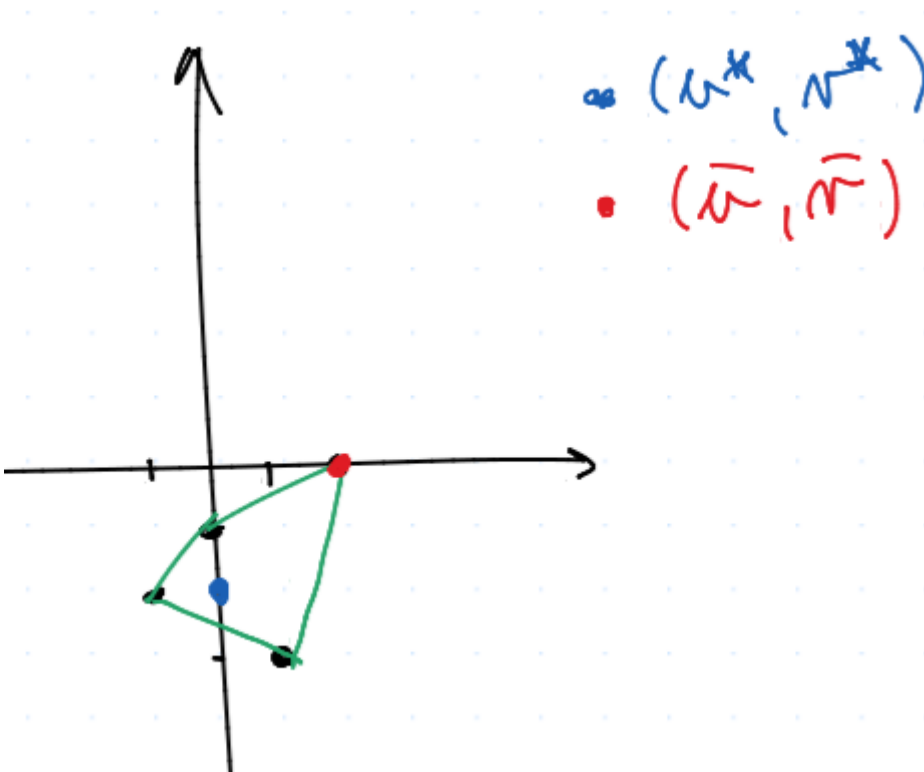
Mějme bimaticovou hru

- student

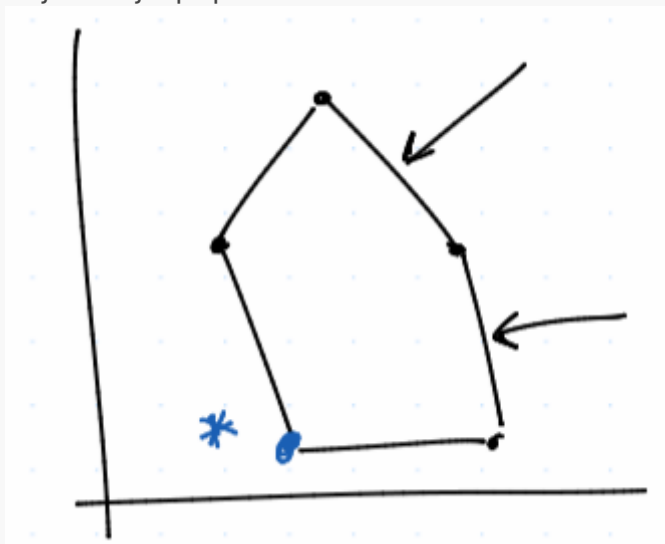
$$A = \begin{matrix} \text{učí} & \text{neučí} \\ \hline \text{dá} & \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \\ \text{nedá} & \end{matrix}$$
- učitel

$$B = \begin{matrix} 0 & -2 \\ -3 & -1 \end{matrix}$$

U bimaticových her je S konvexní obal všech situací a bodů z dolních hodnot



Zajímavější případ



Revision #4

Created 20 March 2023 07:02:37 by Sceptri

Updated 17 April 2023 20:33:48 by Sceptri