

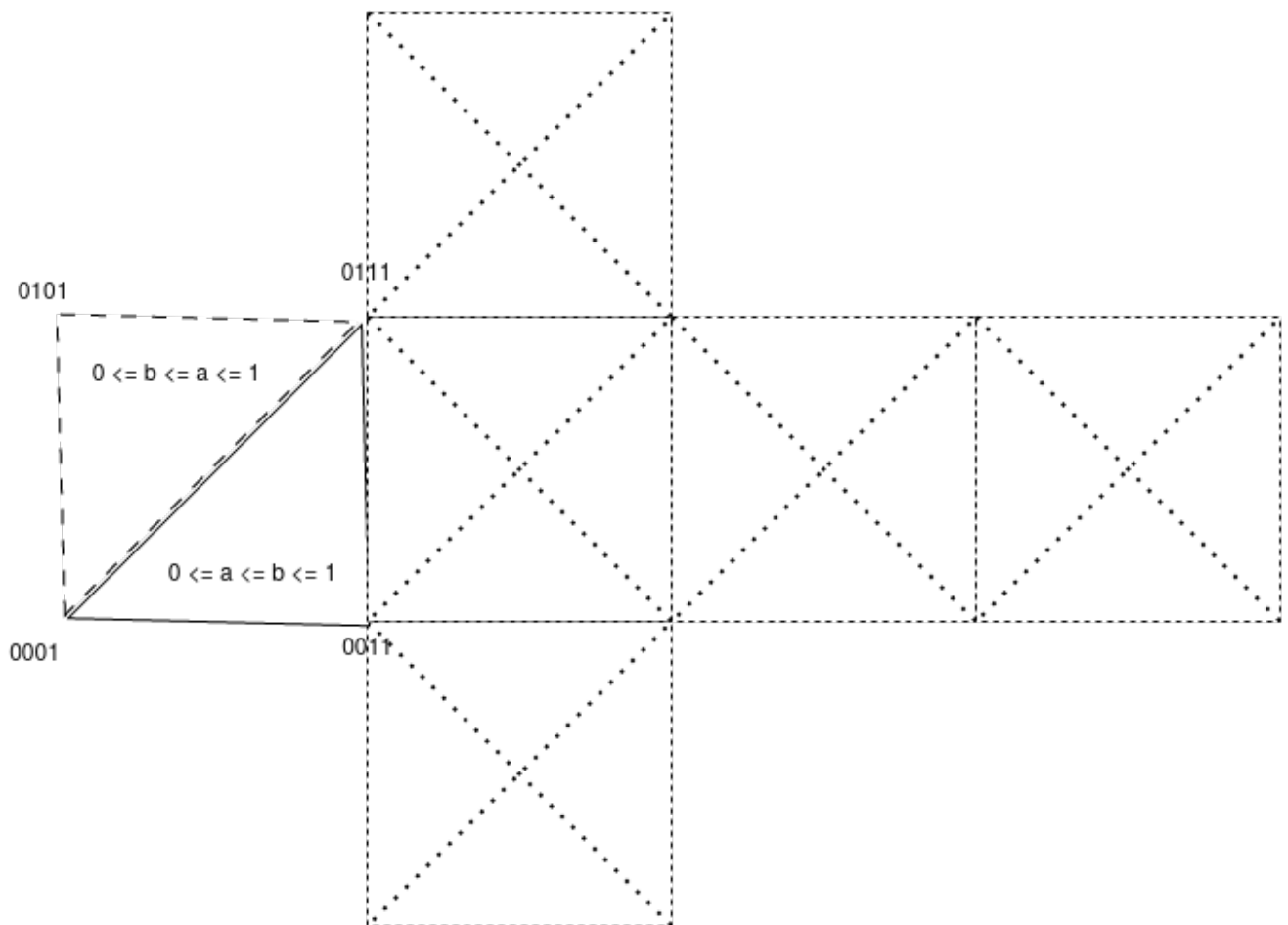
# 5. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\nmtr#1{\begin{matrix} #1 \end{matrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}}
\xdef\mc#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}}
\xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi}
\xdef\Tagged#1{(\text{#1})} \xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-
#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}}
\xdef\conv#1{\mathrm{conv}\,, #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\,, #1}
\xdef\aff#1{\mathrm{aff}\,, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\,, #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\,,
#1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\,, #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1}
\xdef\interior#1{\mathrm{int}\,, #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\,, #1}
\xdef\grad#1{\mathrm{grad}\,, #1} \xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1}
\xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1} \xdef\hess#1{\nabla^2\,, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x
#1} \xdef\jacobx#1{D_x #1} \xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1}
\xdef\co#1{\mathrm{co}\,, #1} \xdef\iter#1{^{\{#1\}}} \xdef\str{^*} \xdef\spv{\mc V}
\xdef\civ{\mc U} \xdef\other#1{\hat{#1}} $$
```

## Klasifikace 2x2 her

Předpokládejme, že máme hru  $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ , kde  $0 \leq a \leq b \leq 1$ , což v extrémech odpovídá

0	$a$	$b$	1
0	1	1	1
0	0	0	1
0	0	1	1



“ Tady změna krychle odpovídá změně jedné nerovnosti

## Opakované hry

Mějme strategii v 1-paměťovém prostředí  $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)$ , kde

- $p_0$  - pravděpodobnost *spolupráce*  $SS$  na začátku (v 1. kole)
- $p_1$  - pravděpodobnost *spolupráce*  $SS$  po  $SS$
- $p_2$  - pravděpodobnost *spolupráce*  $SS$  po  $SZ$
- $p_3$  - pravděpodobnost *spolupráce*  $SS$  po  $ZS$
- $p_4$  - pravděpodobnost *spolupráce*  $SS$  po  $ZZ$

“  $1 - p_i$  je pravděpodobnost *zrady*  $Z$  po  $\dots$

A necht' soupeř má strategii  $(q_0, q_1, q_2, q_3, q_4)$ , přičemž si uvědomme, že  $ZS$  pro nás je  $SZ$  pro něj apod.

Napišme si výherní matici do řádku do **výherního vektoru**  $w = \underline{(w_1, w_2, w_3, w_4)}_{\{(SS, SZ, ZS, ZZ)\}}$

A pak výhru v  $n$ -tém kolem dostaneme jako  $(u(p,q))_n = w \cdot \text{mtr}\{P_1 \dots P_4\}$ , kde  $P_i$  je pravděpodobnost, že hra dospěla do stavu  $SS, SZ, ZS, ZZ$

Vektor  $\text{mtr}\{P_1 \dots P_4\}$  určíme pomocí teorie markovských řetězců. Spočítejme si přechodovou matici  $A$  - ta bude mít tvar  $A = \begin{matrix} SS & SZ & ZS & ZZ \\ \text{mtr}\{p_1 q_1 & p_2 q_3 & p_3 q_2 & p_4 q_4 & p_1(1-q_1) & p_2(1-q_3) & p_3(1-q_2) & p_4(1-q_4) & (1-p_1)q_1 & (1-p_2)q_3 & (1-p_3)q_2 & (1-p_4)q_4 & (1-p_1)(1-q_1) & (1-p_2)(1-q_3) & (1-p_3)(1-q_2) & (1-p_4)(1-q_4)\} \end{matrix}_{SS, SZ, ZS, ZZ}$

A pak jistě platí  $P = A^n \text{mtr}\{p_0 q_0 \dots\}$

Za předpokladu stability se neprojeví počáteční vektor  $\text{mtr}\{p_0 q_0 \dots\}$ , ale hra dospěje do vektoru  $\text{vv } x$  takového, že  $A \text{vv } x = \text{vv } x$

Matice  $A$  musí být **pravděpodobností**, tj. suma v každém sloupci musí být 1.

Tento problém řešíme jako  $A \text{vv } x = x \iff (A - I) \text{vv } x = 0$ , kde  $\text{vv } x$  říkáme **stacionární vektor** (z linebry dostaneme, že řešení musí jediné až na násobek), který také musí být *pravděpodobnostní*, tj.  $\sum \text{vv } x = 1$ .

Rozepišme si  $A - E = \text{mtr}\{p_1 q_1 - 1 \dots\}$ , což řešíme pomocí **Cramerova pravidla**

$$\left( \begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ A - E & & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} (1) - (3) \\ B \end{matrix}$$

a tedy  $\text{vv } x_1 = \frac{|B_1|}{|B|}$

kde  $B_1$  je matice, kde jsme 1. sloupec vyměnili za sloupec pravých stran

V tuto chvíli, pokud budeme pouze sčítat řádky, tak se nám nemění determinant. Tedy přičteme 1. řádek z  $B$  k tomu 2. a 3., tj.

$$|B| = \begin{vmatrix} P_1 q_1^{-1} & P_2 q_3 & P_3 q_2 & P_4 q_4 \\ P_1 - 1 & P_2 - 1 & P_3 & P_4 \\ q_1^{-1} & q_3 & q_2 - 1 & q_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

A provedme Laplaceův rozvoj podle 1. řádků pro  $B_1$

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 0 & P_2 q_3 & P_3 q_2 & P_4 q_4 \\ 0 & P_2 - 1 & P_3 & P_4 \\ 0 & q_3 & q_2 - 1 & q_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \begin{vmatrix} P_2 q_3 & P_3 q_2 & P_4 q_4 \\ P_2 - 1 & P_3 & P_4 \\ q_3 & q_2 - 1 & q_4 \end{vmatrix}$$

Obdobně bychom postupovali i pro  $B_2$

$$|B_2| = \begin{vmatrix} p_1 q_1 - 1 & p_3 q_2 & p_4 q_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

Celkem naše výhra  $u = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots$   
 $u = w_1 \frac{|B_1|}{|B|} + w_2 \frac{|B_2|}{|B|} + \dots$   
 $u = \frac{w_1 |B_1| + w_2 |B_2| + \dots}{|B|}$ ,  
 přičemž jmenovatel můžeme vnímat jako Laplaceův rozvoj pro  $B$ , kde místo vektoru  $1$  jsme dali vektor  $w$ , tj.

$$|C| = \begin{vmatrix} p_1 q_1 - 1 & p_2 q_3 & p_3 q_2 & p_4 q_4 \\ p_1 - 1 & p_2 - 1 & p_3 & p_4 \\ q_1 - 1 & q_3 & q_2 - 1 & q_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}$$

Celkem výhru dostaneme jako  $u = \frac{|C|}{|B|}$

Uvědomme si, že každá proměnná je lineární v každém z determinantů (vyskytuje se vždy pouze v jednom sloupci), tj.  $u = \frac{\alpha p_i + \beta}{\gamma p_i + \delta}$

Počítejme optimální vektor  $(p_1, \dots, p_4)$ , tedy  $\frac{\partial u}{\partial p_i} = \frac{\alpha(\gamma p_i + \delta) - (\alpha p_i + \beta)\gamma}{(\gamma p_i + \delta)^2}$   
 $\frac{\partial u}{\partial p_i} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma p_i + \delta)^2}$

Tedy to znamená, že řešíme znaménko pouze u  $\alpha\delta - \beta\gamma$

Tedy se výhra řídí ryze rostoucí, či ryze klesající, funkcí v každém parametru

Celkem nejlepší protihra (odpověď) se realizuje nějakou "rohovou" strategií, tj. volbou  $p_i \in \{0, 1\}$  (nebo s šumem  $\{v, 1 - v\}$ )

Případě, že nám vyjde parciální derivace nulová, tak dostaneme "nerohové strategie", což odpovídá celé jedné stěně hyperkrychle  $[0,1]^4$ .

Spočítejme si nyní onu parciální derivaci "pořádně":

$$\frac{\partial |B|}{\partial p_1} = \begin{vmatrix} q_1 & p_2 q_3 & \cdot & \cdot \\ 1 & p_2 - 1 & \cdot & 1 \\ 0 & q_3 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial |C|}{\partial p_1} = \begin{vmatrix} \text{---} & // & \text{---} \\ 0 & w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Z tohoto dostáváme podle **Sarrusovy-Jacobiho formule**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & \boxed{A} & e \\ f & g & h \end{vmatrix} \cdot |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ d & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & e \\ g & h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & c \\ A & e \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & A \\ f & g \end{vmatrix}$$

ve smyslu jejího značení  $|A| = \left| \begin{matrix} p_2 q_3 & \dots & p_2 - 1 & \dots & q_3 & \dots \end{matrix} \right|$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ p_1 q_1 - 1 & & & q_1 \\ p_1 - 1 & A & & 1 \\ q_1 - 1 & & & 0 \\ w_1 & w_2 & & 0 \end{vmatrix}$$

“ V této formě to na zkoušce **nebude**

## Speciální strategie v IPD

- **ekvalizátor** - soupeř si volí  $q$  tak, aby  $u$  byla konstantní
  - realizuje se lineární závislostí  $\begin{pmatrix} q_1 & q_3 & q_2 - 1 & q_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  a  $\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix}$
  - některé determinanty jsou zde nulové
- **0-determinant (ZD-strategie)**
  - rozdíl mezi  $u$  a  $v$  je prohození  $w_2$  a  $w_4$  (je to symetrická hra)
  - $v$  se liší od  $u$  vektorem výher  $\bar{w} = \begin{pmatrix} w_1 & w_3 & w_2 & w_4 \end{pmatrix}$
  - $u = \frac{\|w\|}{\|1\|}, \quad v = \frac{\|\bar{w}\|}{\|1\|}$  a  $\begin{vmatrix} q_1 & \dots & q_4 & 1 & \dots & 4 \\ w_1 & \dots & w_4 & w_1 & \dots & w_4 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} q_1 & \dots & q_4 & 1 & \dots & 4 \\ w_1 & \dots & w_4 & w_1 & \dots & w_4 \end{vmatrix}$
  - jsou tzv. **vyděračské strategie**

Revision #3

Created 13 March 2023 07:04:13 by Sceptri

Updated 13 October 2023 06:13:21 by Sceptri