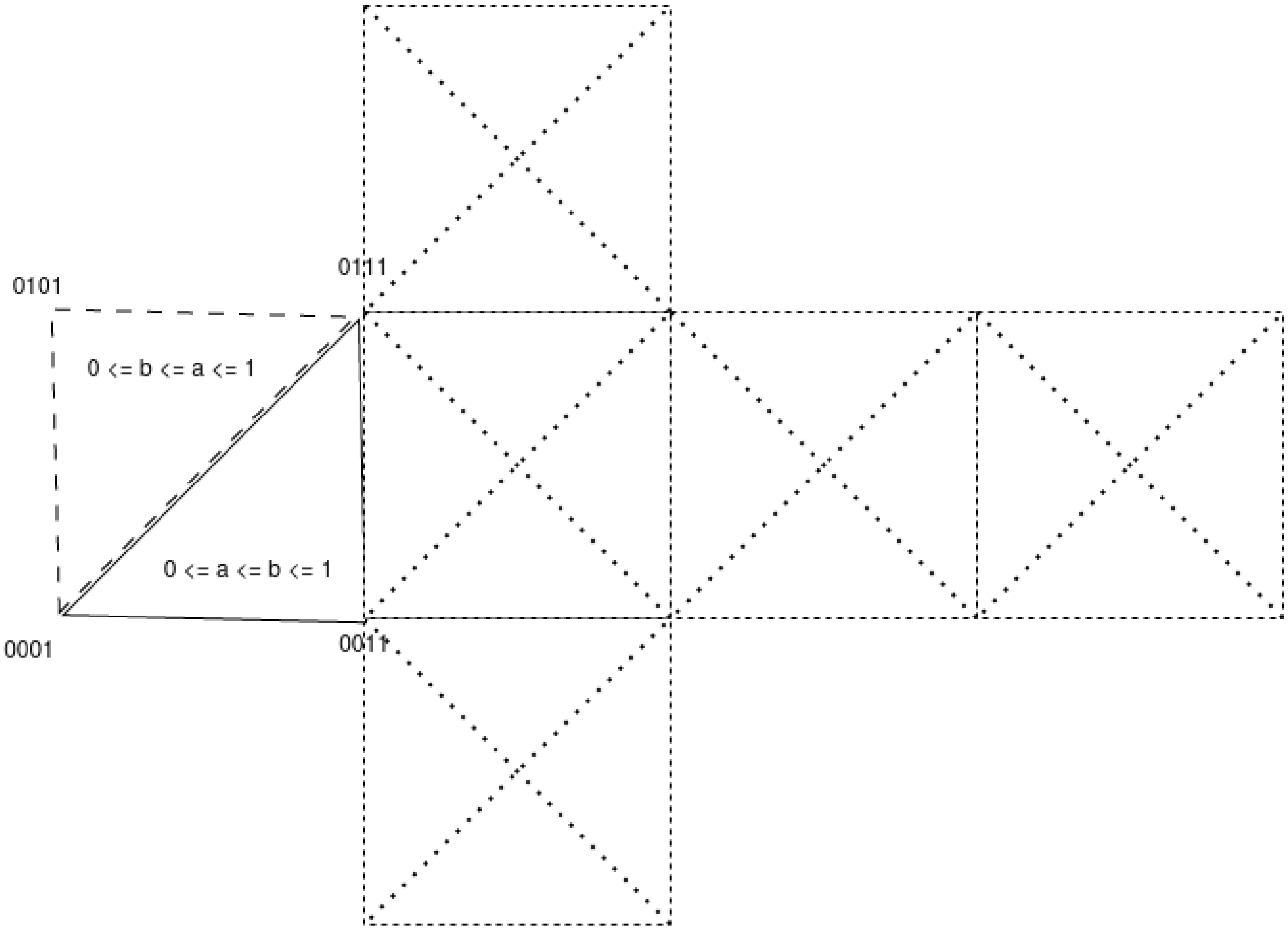
5. přednáška

$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\lVert #1 \right\rVert} \xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&}\xdef\AND{\quad \and \quad}\xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}} \xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix}#1\end{pmatrix}} \xdef\nmtr#1{\begin{matrix}#1\end{matrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mcal#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}}\xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\a{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})} \xdef\tagged*#1{\text{#1}} \xdef\tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}} \xdef\tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}} \xdef\tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}\, #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}\, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\, #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\, #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}\, #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}\, #1} \xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1} \xdef\hess#1{\nabla^2\, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1} \xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}\, #1} \xdef\iter#1{^{[#1]}} \xdef\str{^*} \xdef\spv{\mcal V} \xdef\civ{\mcal U} \xdef\other#1{\hat{#1}} $$

Klasifikace 2x2 her

Předpokládejme, že máme hru $$ \mtr{ 0 & a \ b & 1 }, $$ kde $0 \leq a \leq b \leq 1$, což v extrémech odpovídá

0	a	b	1
0	1	1	1
0	0	0	1
0	0	1	1



> Tady změna krychle odpovídá změně jedné nerovnosti

Opakované hry

Mějme strategii v 1-paměťovém prostředí $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)$, kde

- p_0 - pravděpodobnost *spolupráce* S na začátku (v 1. kole)
- p_1 - pravděpodobnost *spolupráce* S po SS
- p_2 - pravděpodobnost *spolupráce* S po SZ
- p_3 - pravděpodobnost *spolupráce* S po ZS
- p_4 - pravděpodobnost *spolupráce* S po ZZ

> $1 - p_i$ je pravděpodobnost *zrady* Z po $\dots$

A nechť soupeř má strategii $(q_0, q_1, q_2, q_3, q_4)$, přičemž si uvědomme, že ZS pro nás je SZ pro něj apod.

Napišme si výherní matici do řádku do **výherního vektoru** $$ w = \underbrace{(w_1, w_2, w_3, w_4)}_{(SS, SZ, ZS, ZZ)} $$

A pak výhru v n-tém kolem dostaneme jako $$ (u(p,q))_n = w \cdot \mtr{P_1 \ \vdots \ P_4}, $$ kde P_i je pravděpodobnost, že hra dospěla do stavu SS, SZ, ZS, ZZ

Vektor $\mtr{P_1 \ \vdots \ P_4}$ určíme pomocí teorie markovských řetězců. Spočítejme si přechodovou matici A - ta bude mít tvar $$ A = \begin{matrix} SS \ SZ \ ZS \ ZZ \end{matrix}\underbrace{\mtr{ p_1 q_1 & p_2 q_3 & p_3 q_2 & p_4 q_4\ p_1 (1 - q_1) & p_2 (1 - q_3) & p_3 (1 - q_2) & p_4 (1 - q_4) \ (1-p_1)q_1 & (1 - p_2)q_3 & (1 - p_3) q_2 & (1 - p_4) q_4 \ (1 - p_1)(1 - q_1) & (1- p_2) (1 - q_3) & (1 - p_3) (1 - q_2) & (1 - p_4) (1 - q_4) }}_{SS, SZ, ZS, ZZ} $$

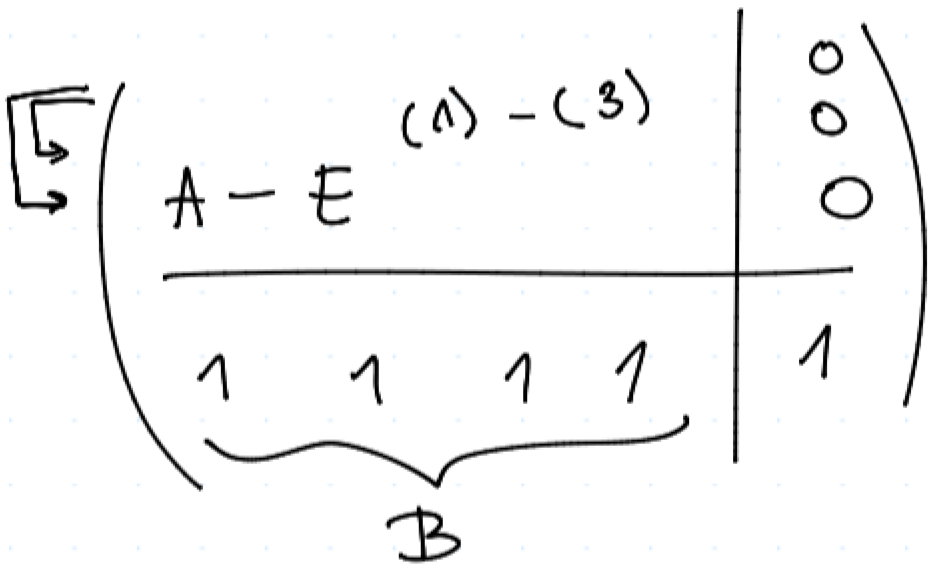
A pak jistě platí $$ P = A^n \mtr{ p_0 q_0 \ p_0 (1 - q_0) \ \vdots } $$

Za předpokladu stability se neprojeví počáteční vektor $\mtr{ p_0 q_0 \ p_0 (1 - q_0) \ \vdots }$, ale hra dospěje do vektoru $\vv x$ takového, že $A \vv x = \vv x$

> Matice A musí být **pravděpodobností**, tj. suma v každém sloupci musí být 1.

Tento problém řešíme jako $$ A \vv x = x \ (A - I)\vv x = 0, $$ kde $\vv x$ říkáme **stacionární vektor** (z lingebry dostaneme, že řešení musí jediné až na násobek), který také musí být *pravděpodobnostní*, tj. $\sum \vv x = 1$.

Rozepišme si $$ A- E = \mtr{ p_1 q_1 - 1 & p_2 q_3 & p_3 q_2 & p_4 q_4\ p_1 (1 - q_1) & p_2 (1 - q_3) - 1 & p_3 (1 - q_2) & p_4 (1 - q_4) \ (1-p_1)q_1 & (1 - p_2)q_3 & (1 - p_3) q_2 - 1 & (1 - p_4) q_4 \ (1 - p_1)(1 - q_1) & (1- p_2) (1 - q_3) & (1 - p_3) (1 - q_2) & (1 - p_4) (1 - q_4) - 1 }, $$ což řešme pomocí **Cramerova pravidla**



a tedy $$ \vv x_1 = \frac {|B_1|} {|B|} $$

> kde B_1 je matice, kde jsme 1. sloupec vyměnili za sloupec pravých stran

V tuto chvíli, pokud budeme pouze sčítat řádky, tak se nám nemění determinant. Tedy přičtěme 1. řádek z B k tomu 2. a 3., tj.

$$|B| = \begin{vmatrix} p_1q_1 - 1 & p_2q_3 & p_3q_2 & p_4q_4 \\ p_1 - 1 & p_2 - 1 & p_3 & p_4 \\ q_1 - 1 & q_3 & q_2 - 1 & q_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

A proveďme Laplaceův rozvoj podle 1. řádků pro B_1

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 0 & p_2q_3 & p_3q_2 & p_4q_4 \\ 0 & p_2 - 1 & p_3 & p_4 \\ 0 & q_3 & q_2 - 1 & q_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} p_2q_3 & p_3q_2 & p_4q_4 \\ p_2 - 1 & p_3 & p_4 \\ q_3 & q_2 - 1 & q_4 \end{vmatrix}$$

Obdobně bychom postupovali i pro B_2

$$|B_2| = \begin{vmatrix} p_1 q_1 - 1 & p_3 q_2 & p_4 q_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

Celkem naše výhra $$ u = w_1 \vv x_1 + w_2 \vv x_2 + \dots \ u = w_1 \frac {|B_1|} {|B|} + w_2 \frac {|B_2|} {|B|} + \dots \ u = \frac{w_1 |B_1| + w_2 |B_2| + \dots} {|B|}, $$ přičemž jmenovatel můžeme vnímat jako Laplaceův rozvoj pro B, kde místo vektoru 1 jsme dali vektor w, tj.

$$|C| = \begin{vmatrix} p_1 q_1 - 1 & p_2 q_3 & p_3 q_2 & p_4 q_4 \\ p_1 - 1 & p_2 - 1 & p_3 & p_4 \\ q_1 - 1 & q_3 & q_2 - 1 & q_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}$$

Celkem výhru dostaneme jako $$ u = \frac {|C|} {|B|} $$

> Uvědomme si, že každá proměnná je lineárné v každém z determinantů (vyskytuje se vždy pouze v jednom sloupci), tj. $$ u = \frac{\alpha p_i + \beta} {\gamma p_i + \delta} $$

Počítejme optimální vektor $(p_1, \dots, p_4)$, tedy $$ \parc u {p_i} = \frac{\alpha(\gamma p_i + \delta) - (\alpha p_i + \beta) \gamma}{(\gamma p_i + \delta)^2} \ \parc u {p_i} = \frac{\alpha \delta - \beta \gamma}{\underbrace{(\gamma p_i + \delta)^2}_{> 0}} $$

Tedy to znamená, že řešíme znaménko pouze u $\alpha \delta - \beta \gamma$

> Tedy se výhra řídí ryze rostoucí, či ryze klesající, funkcí v každém parametru

Celkem nejlepší protihra (odpověď) se realizuje nějakou "rohovou" strategií, tj. volbou $p_i \in \set{0,1}$ (nebo s šumem $\set{\ve, 1 - \ve}$)

> Případě, že nám vyjde parciální derivace nulová, tak dostaneme "nerohové strategie", což odpovídá celé jedné stěně hyperkrychle $[0,1]^4$.

Spočítejme si nyní onu parciální derivaci "pořádně":

$$\frac{\partial}{\partial p_1}$$

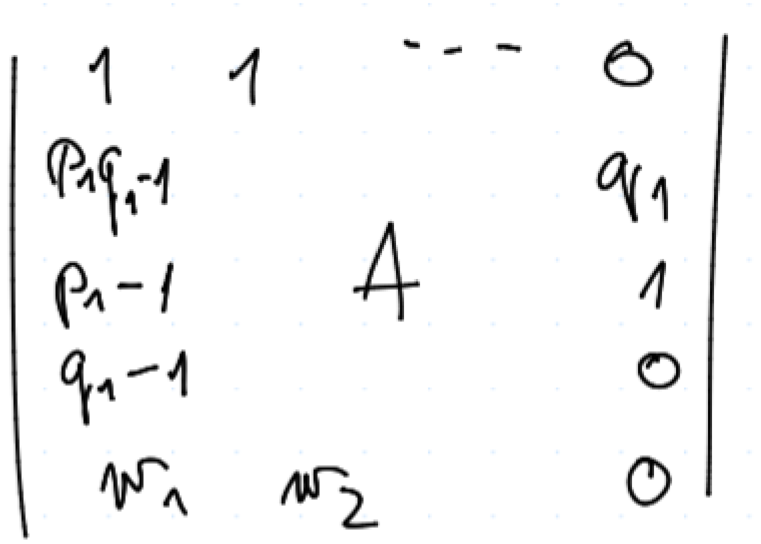
$$\frac{\partial |B|}{\partial p_1} = \begin{vmatrix} q_1 & p_2 q_3 & \cdot & \cdot \\ 1 & p_2 - 1 & \cdot & \vert \\ 0 & q_3 & \vert & \vert \\ 0 & 1 & \vert & \vert \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial |C|}{\partial p_1} = \begin{vmatrix} \text{—} & // & \text{—} & \\ 0 & w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Z tohoto dostáváme podle **Dasnanotovy-Jacobiho formule**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & \boxed{A} & e \\ f & g & h \end{vmatrix} \cdot |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ d & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & e \\ g & h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & c \\ A & e \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & A \\ f & g \end{vmatrix}$$

ve smyslu jejího značení $$ |A| = \left|\begin{matrix} p_2 q_3 & \dots \ p_2 - 1 & \dots \ q_3 & \dots \end{matrix}\right| $$



> V této formě to na zkoušce **nebude**

Speciální strategie v IPD

- **ekvalizátor** - soupeř si volí $\vv q$ tak, aby u byla konstatní
  - realizuje se lineární závislostí $\mtr{q_1 & q_3 & q_2 - 1 & q_4}, \mtr{1 & 1 & 1 & 1}$ a $\mtr{w_1 & w_2 & w_3 & w_4}$
  - některé determinanty jsou zde nulové
- **0-determinant** (*ZD-strategie*)
  - rozdíl mezi u a v je prohození w_2 a w_2 (je to symetrická hra)
  - v se liší od v vektorem výher $\bar w = \mtr{w_1 & w_3 & w_2 & w_4}$
  - $$ u = \frac {|w|} {|1|}, \qquad v = \frac {|\bar w|} {|1|} $$ a $$ \left|\begin{matrix} q_1 & \dots & q_4 \ 1 & \dots & 4 \ w_1 & \dots & w_4 \ w_1 & \searrow \hspace{-10pt}\swarrow & w_4 \end{matrix}\right| $$
  - jsou tzv. **vyděračské strategie**

Revision #3
Created 13 March 2023 07:04:13 by Sceptri
Updated 13 October 2023 06:13:21 by Sceptri