

# 4. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\nmtr#1{\begin{matrix} #1 \end{matrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}}
\xdef\mc#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}}
\xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi}
\xdef\Tagged#1{(\text{#1})} \xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-
#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}}
\xdef\conv#1{\mathrm{conv}\,, #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\,, #1}
\xdef\aff#1{\mathrm{aff}\,, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\,, #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\,,
#1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\,, #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1}
\xdef\interior#1{\mathrm{int}\,, #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\,, #1}
\xdef\grad#1{\mathrm{grad}\,, #1} \xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1}
\xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1} \xdef\hess#1{\nabla^2\,, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x
#1} \xdef\jacobx#1{D_x #1} \xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1}
\xdef\co#1{\mathrm{co}\,, #1} \xdef\iter#1{^{[#1]}} \xdef\str{^*} \xdef\spv{\mc V}
\xdef\civ{\mc U} \xdef\other#1{\hat{#1}} $$
```

## Opakované hry

“ Znovu definujeme **strategii**, jako celkový vzorec chování (algoritmus, kterým vybíráme **akci** pro dané kolo). **Akce** je výběr pro dané kolo.

Rozdělme si je na

- *konečné opakování*
- *nekonečné opakování*

## Konečné věžňovo dilema

Mějme matici hry 
$$\begin{matrix} & \text{spolupracovat} & \text{zradit} \\ \begin{matrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{matrix} & \end{matrix}$$

Nyní předpokládejme, že ji budeme hrát  $2 \times$ :

- Jistě v 2. druhém kole bude výhodné zradit ( $ZZ$ )
- Jelikož v 2. kole dávalo smysl pouze zradit, tak i v prvním kole budeme zrazovat, protože 2. kolo stejně nijak neovlivníme

Obecně pro konečné opakování vězňova dilematu vede k výsledku  $ZZ$  pro všechna kola

## Nekonečné vězňovo dilema

Můžeme interpretovat, že nevíme, které kolo je poslední.

Celkovou výhru si definujeme jako:

1. Mějme výhry prvního hráče v  $i$ -tém kole  $u_1, u_2, \dots$  Pak vezmeme **částečný průměr**, který pošleme do limity, jako výhru, tj.  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$  Avšak pro například řadu výher  $1, 0, \underbrace{1}_2, 0, \underbrace{1}_4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \underbrace{1}_3, \dots$

“ Tedy částečné průměry **nefungují obecně**

2. Pomocí **disktování**

Zavedme  $\delta \in (0,1)$  (diskontní faktor) a pak  $\bar{u}_1 = \delta u_1, \bar{u}_2 = \delta^2 u_2, \dots, \bar{u}_n = \delta^n u_n$

“ Tedy v tomto případě mají větší hodnotu "peníze" (výhra), která je teď. Navíc je degradace hry pořád stejná  
Velké  $\delta$  můžeme interpretovat jako "strádatele"... Pro malé  $\delta$  "žije hráč okamžikem"  $u = \delta u_1 + \delta^2 u_2 + \dots$  Lze vždy sečíst

3. **Overtaking**

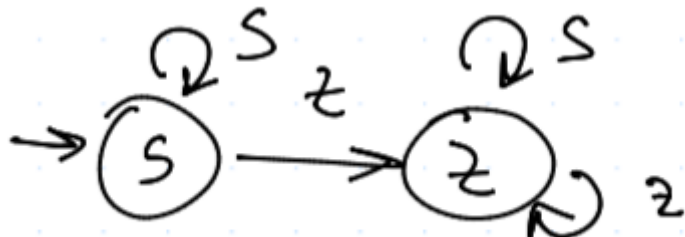
Pro 2 posloupnosti výher  $u_1, u_2, \dots, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots$  Pak řekneme, že  $u_i \succ \bar{u}_i$  pokud  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (u_1 - \bar{u}_1) + \dots + (u_n - \bar{u}_n) > 0$

“ Z pohledu psychologie je pro nás důležitější výsledek "ve většině případů"

Jsou-li strategie hráčů dány konečnými automaty, pak lze výhry sečíst částečným průměrováním.

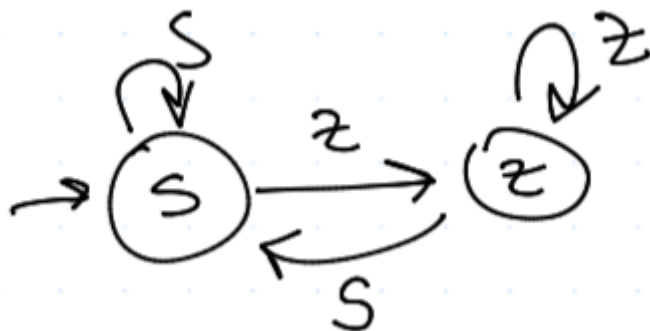
# Vybrané strategie pro věžňovo dilema

## Spoušť (Trigger)

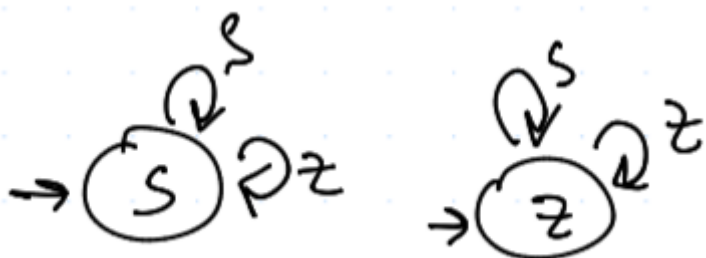


“ Hodí se pro existenční důkazy

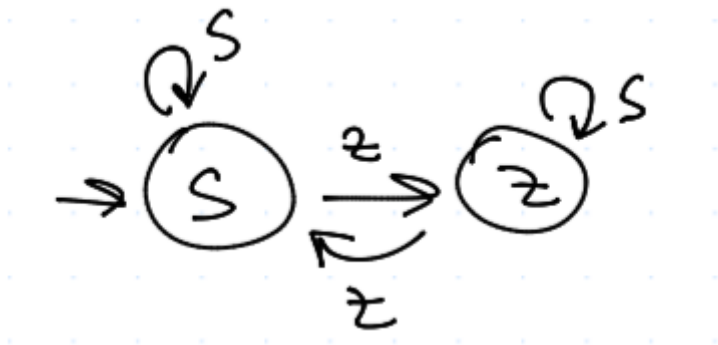
## Oko za oko (TFT - Tit For Tat)



## Hrdlička a Jestřáb (Always Cooperate (AIC) / Always Defect (AIID))



## Pavlov (pes) (Win Stay Lose Switch - WSLS)

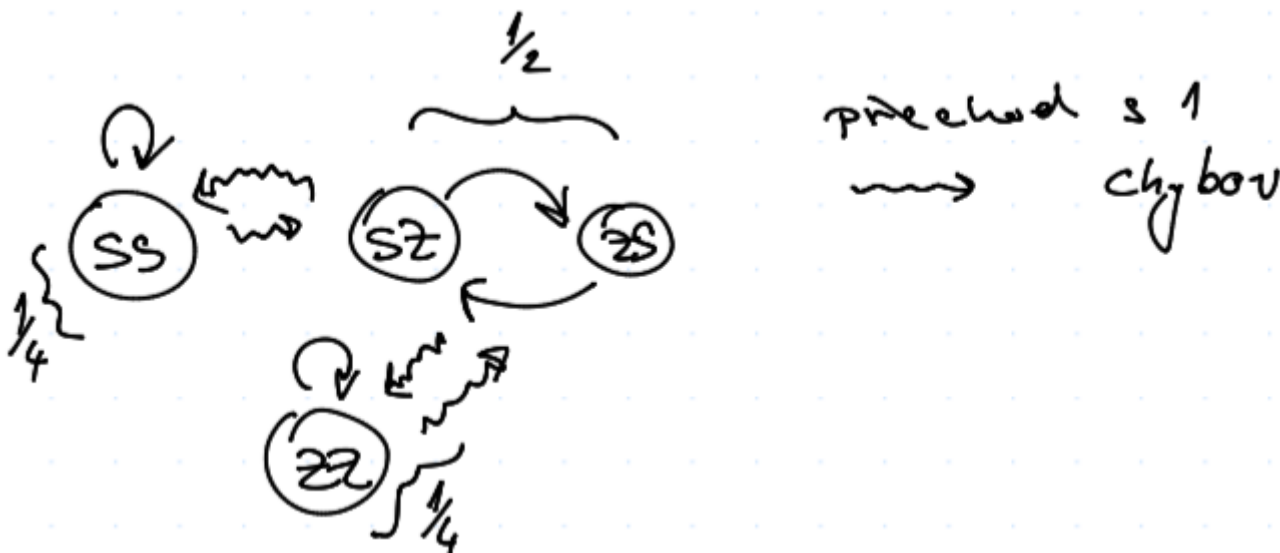


Často zavádíme šum  $\epsilon > 0$  a předpokládáme, že hráč dodrží svou strategii (plán své strategie) s pravděpodobností  $1 - \epsilon$ , tj. s pravděpodobností  $\epsilon$  dojde k zahrání opačné akce.

Podívejme se nyní na

## TFT vs. TFT

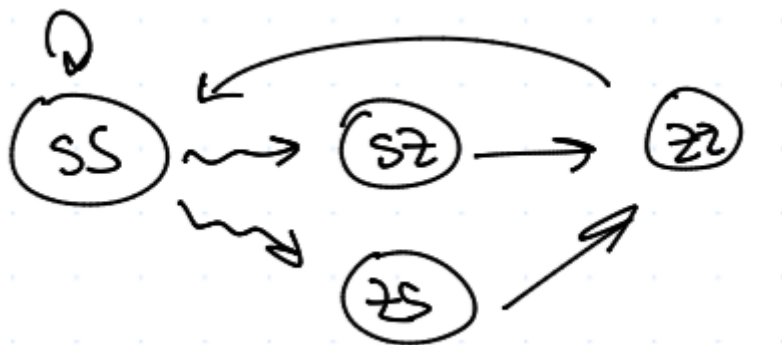
Možné stavy



Počítejme výhru prvního částečným průměrováním  $u = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{0 + 3}{2} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{2}$

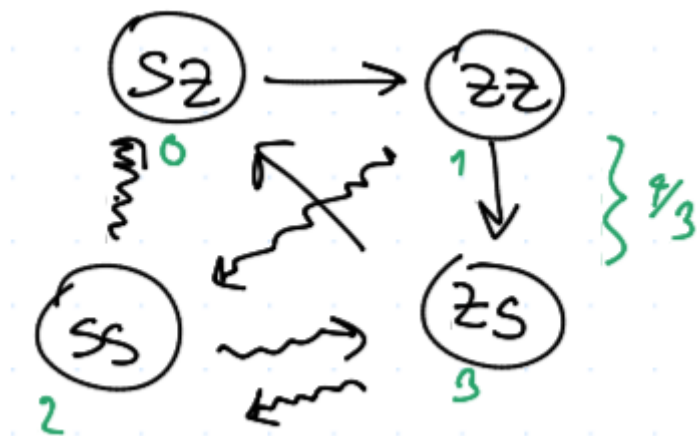
“Oko za oko je trochu moc přísné

## WSLS vs. WSLS



Přičemž  $u \approx 2 - \sqrt{x}$

## TFT vs. WSLS



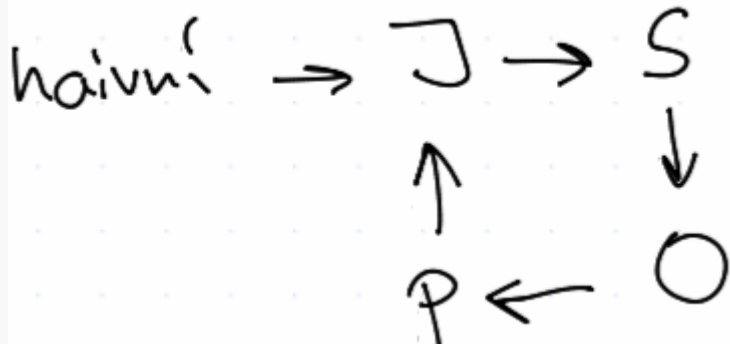
## Turnaj

X	S	O	H	J	P	$\sum$
S	$\approx 1$	$\approx 1$	$\approx 5/2$	$\approx 1$	$\approx 1$	$\approx \frac{13}{2}$
O						
H						
J					2	
P				$\frac{1}{2}$		

“ Pokud je hodně "pes" strategií v Turnaji, tak vyhraje, protože spolu dobře spolupracuje

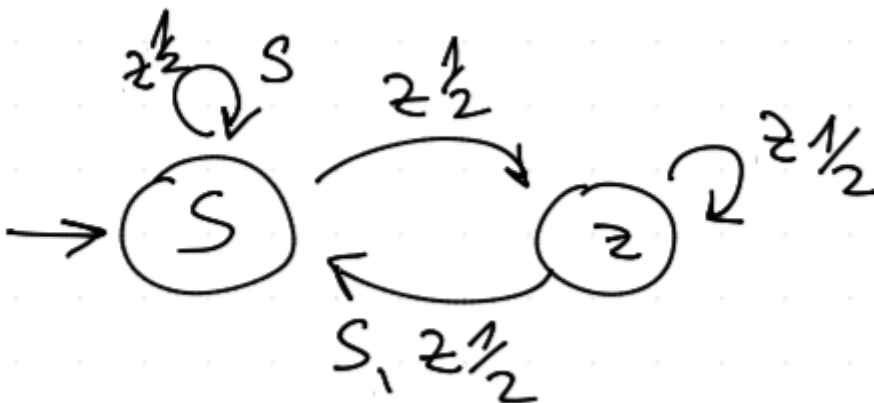
V "evoluční/populační" variantě, tj. necháváme potomky dobrých strategií v turnaji, často vyhraje pes, protože hraje dobře sám se sebou

Naopak je vidět, že Jestřáb umí vytěžit psa



## Strategie se stochastickými přestupy

### Šlechtné oko



nebo můžeme udělat novou parametrizaci

- $p_0$  - pravděpodobnost spoluprací na začátku
  - $1 - p_0$  - začnu zradou
- $p_1$  - pst. přechodu od SS ke spolupráci
- $p_2$  - pst. přechodu od SZ ke spolupráci
- $p_3$  - pst. přechodu od ZS ke spolupráci
- $p_4$  - pst. přechodu od ZZ ke spolupráci

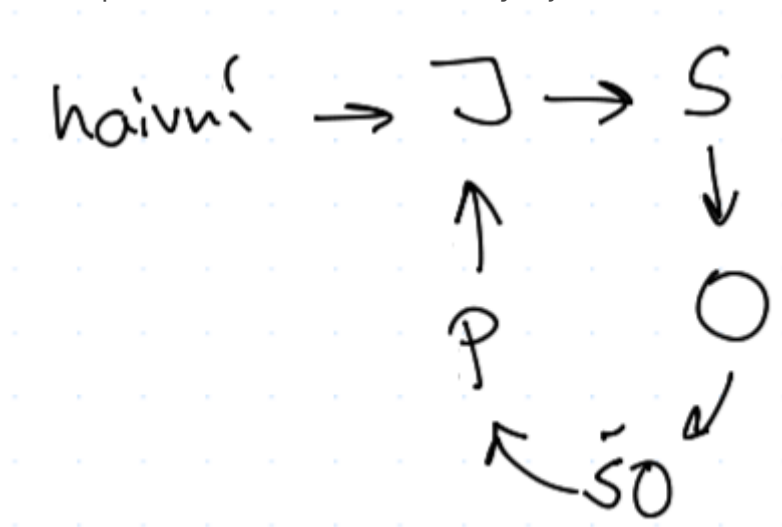
	$\text{to } S$	SS $\text{to } S$	SZ $\text{to } S$	ZS $\text{to } S$	ZZ $\text{to } S$	
X	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	šum

	$\$to\$ S$	$SS \$to\$ S$	$SZ \$to\$ S$	$ZS \$to\$ S$	$ZZ \$to\$ S$	
J	0	0	0	0	0	$$(\vee, \vee, \vee, \vee, \vee)$$
H	1	1	1	1	1	$$(1 - \vee, \dots)$$
S	1	1	0	0	0	
O	1	1	0	1	0	
P	1	1	0	0	1	
ŠO	1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	

“ Všechny zmíněné byly tzv. **jednopaměťové strategie**, tzn. akce vychází pouze z předchozího kola

“ V Axelrodově turnaji byly i strategie s delší pamětí, ale nebyly moc dobré

V této parametrizaci v evolučním vývoji nastalo



“ Je to svým způsobem analogie pravděpodobnostního rozšíření, kdy strategie definujeme jako pětice parametrů

Jak dopadne  $(p_0, \dots, p_4)$  proti  $(q_0, \dots, q_4)$ ?