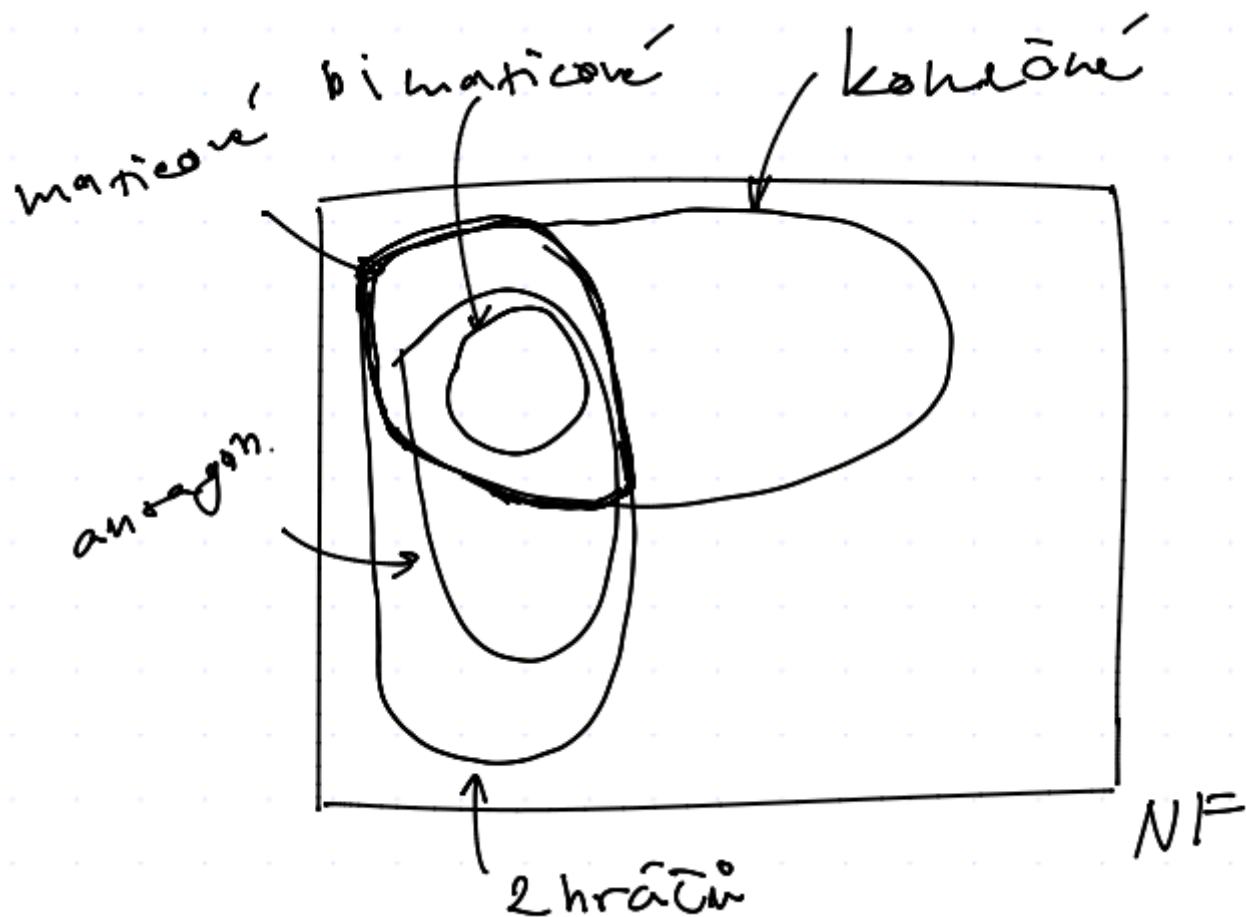


# 3. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\nmtr#1{\begin{matrix} #1 \end{matrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}}
\xdef\mc#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}}
\xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi}
\xdef\Tagged#1{\text{#1}} \xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-
#1}{\text{#1}}} \xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}}
\xdef\conv#1{\mathrm{conv}\,, #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\,, #1}
\xdef\aff#1{\mathrm{aff}\,, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\,, #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\,,
#1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\,, #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1}
\xdef\interior#1{\mathrm{int}\,, #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\,, #1}
\xdef\grad#1{\mathrm{grad}\,, #1} \xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1}
\xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1} \xdef\hess#1{\nabla^2\,, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x
#1} \xdef\jacobx#1{D_x #1} \xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1}
\xdef\co#1{\mathrm{co}\,, #1} \xdef\iter#1{^{\{#1\}}} \xdef\str{^*} \xdef\spv{\mc V}
\xdef\civ{\mc U} \xdef\other#1{\hat{#1}} $$
```

Přehled her



## Bimaticové hry 2x2

Mějme  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $\quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

V případě dominování, např.  $a > b$  a  $c > d$ , je to jednoduché... Tedy předpokládejme, že žádný řádek nedominuje pro 1. hráče a žádný sloupec pro 2. hráče.

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

A tedy  $u(p,q) = \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$ ,  $v(p,q) = \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$

## Rovnováhy

Hráč 2 chce zabránit volit tomu prvnímu a tedy indifferenční rovnice je tvaru  $u(0, q) = u(1, q) \implies c + q(1-q) = a + b(q(1-q) + (c-d)q + d) = (a-b)q + b + (a-b-c+d)q = d-b$   
 $q = \frac{d-b}{a-b-c+d}$  a opačně  $v(p, 0) = v(p, 1) \implies p(1-p)f + h = p(1-p)e + g \implies p(f-e-h+g) - h+g = 0 \implies p = \frac{g-h}{f-e-g+h}$

Pak tedy rovnovážná strategie ve smíšených strategiích je tvaru  $(p, q)$

## Dolní hodnota

Počítejme  $h_1^-$  a tedy bychom chtěli zjistit, jak máme volit  $p$ , aby nám bylo jedno, jak hraje 2. hráč  $u(p, 0) = u(p, 1) \implies p(1-p)b + d = p(1-p)a + c \implies p = \frac{d-c}{a-b-c+d}$

## Příklady her 2x2

Mějme  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$  to  $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$  to  $\begin{pmatrix} 4/7 & 1/7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Normalizace hry:** První posuneme hru do kladných čísel, pak ji "zmenšíme" tak, že největší výhra 1 Tj.

- $\min A = 0$
- $\max A = 1$

⚡ **Pozor**, pořád jsou to ekvivalentní hry!!

## Přehled základních her 2x2

⚡ Prozkoumejme čtveřici  $(0, 1, 2, 3)$

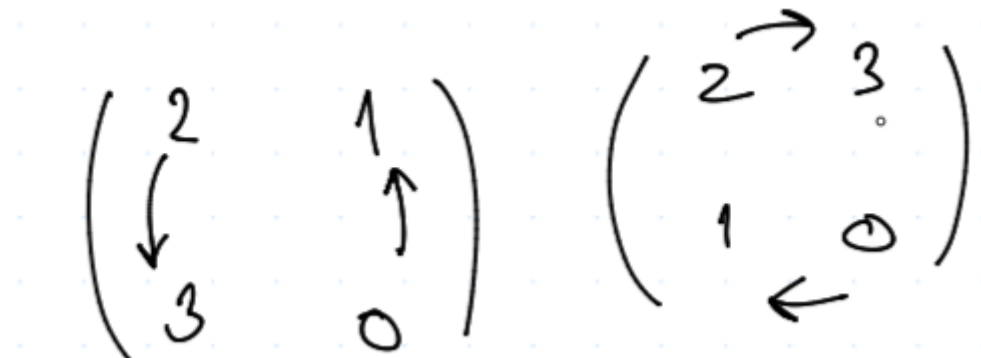
- mince**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\text{quad } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  tato hra **není** symetrická, ale je "spravedlivá" (kdyby si vyměnili role, tak jim to nepomůže). Zřejmě ani jeden z hráčů nemá dominovanou strategii. Počítejme rovnováhu  $q = \frac{1-0}{1-0-0+1} = \frac{1}{2} = \dots = p$  a rovnováha je  $(p, q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Přičemž dolní hodnota  $q = \frac{1-0}{1-0-0+1} = \frac{1}{2}$  a proto  $h_1^- = \frac{1}{2}$
- na kočku a myš**  
Kočka má na výběr z vytápěné/nevytápěné místnosti (světice/komora)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\text{quad } B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{matrix} & \text{svět.} & \text{komora} \\ \text{světice} & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & \text{svět.} & \text{komora} \\ \text{kočka} & \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \end{matrix}$$

A tedy máme situace  $(3, 0) \sqquad (1, 3) \succ (0, 2) \sqquad (1, 2)$  Tato hra **není** ani antagonistická, ani s nulovým součtem. Evidentně existuje rovnováha pouze v smíšených situacích

### 3. líný rodič

Rodiče chtějí, aby potomek přežil, ale chceme se flákat a nechat to na tom druhém. Je to jistě symetrická hra  $\begin{pmatrix} \text{stará se} & \text{nestará se} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sqquad ()^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$  a potom máme situace  $(0, 0) \prec (2, 2)$ ,  $\underbrace{(1, 3), (3, 1)}_{\text{rovnováhy v čistých}}$  Rozhodně nejde o hru, která aby antagonistická nebo s nulovým součtem.



Ve smíšených strategiích  $q = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = \text{symetrie} = p$  a tedy  $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2}$ . Tedy je lepší, aby se oba rodiče starali, než kdyby to nechali na náhodu

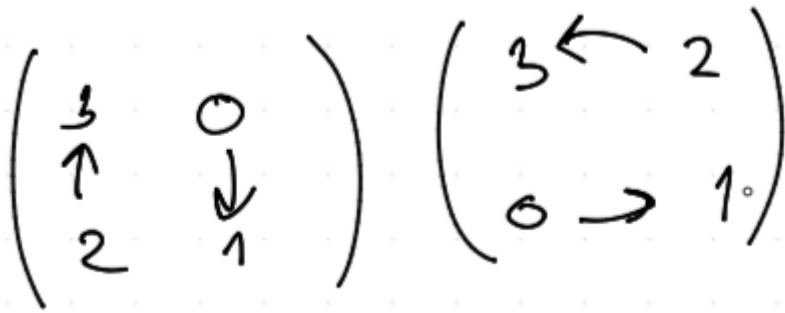
### 4. na kuře

Jedeme proti sobě autem a pokud uhnu dřív, než soupeř, tak jsem prohrál a jsem zbabělec  $\begin{pmatrix} \text{uhnu} & \text{zůstanu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -10 \end{pmatrix}$  Po normalizaci dostaneme hru tvaru **líný rodič**.

### 5. lov na jelena

Máme 2 lovce, kteří se nemohou domluvit. Pokud loví dohromady, tak mají šanci ulovit jelena, ale jeden sám ho neuloví. Navíc můžeme ulovit max 2 zajíce, kteří jsou v lese.  $\begin{pmatrix} \text{jdu na jelena} & \text{jdu na zajíce} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$  Potom situace rovnováhy jsou  $(1, 1)$ ,  $(3, 3)$ , přičemž z ní "jednostraně" nemůžeme uhnout. Navíc  $(3, 3)$  je dominující strategií (je optimální). Jediná **opatrná** strategie je zde jít si pro zajíce.

„Ilustruje, že příroda si může vybrat rovnováhu, která **není** nejlepší - přechod na nejlepší rovnováhu by vyžadoval domluvu.“

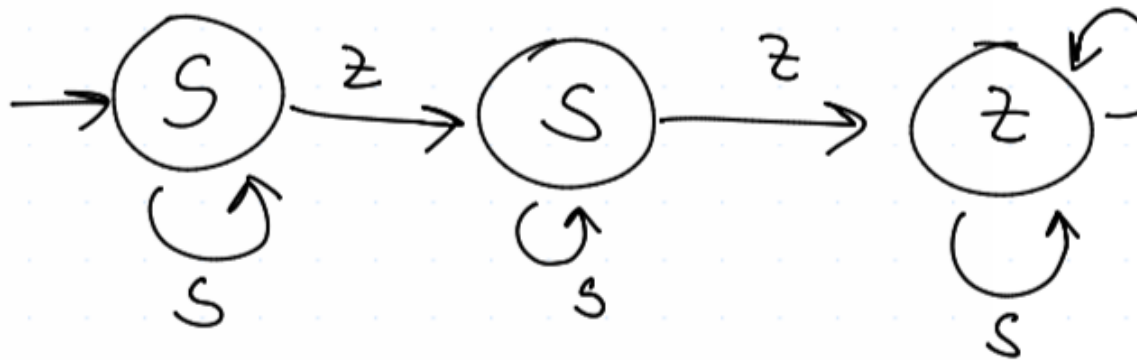


## 6. věžňovo dilema

Máme 2 vězně, kde každý má na výběr buď mlčet (spolupracovat s spolupachatelem) nebo to zkusím hodit na spolupachatele (zradit). Jistě je to navíc symetrická hra  $\text{mtr}\{\text{spolupracovat} \setminus \text{zradit}\} \text{mtr}\{-1 \ \& \ -3 \setminus 0 \ \& \ -2\} \text{to} \text{mtr}\{2 \ \& \ 0 \setminus 3 \ \& \ 1\}$  Po normalizaci si snažíme maximalizovat roky na svobodě (snažíme si ušetřit trest). Jistě navíc  $\text{spolupracovat} \text{prec} \text{zradit}$  Přičemž  $(2,2)$  je jediná rovnovážná situace i ve smíšených strategiích.

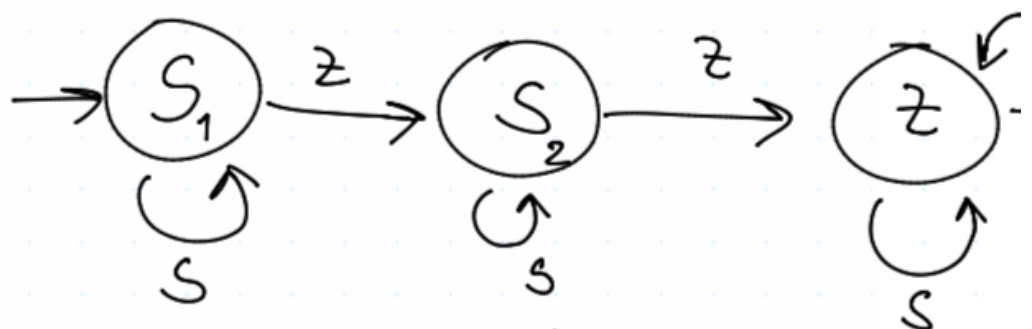
“ V případě opakované hry se rozhodujeme v závislosti na předchozích rozhodnutích. Můžeme řešit pomocí stavového automatu:

3 stavový automat

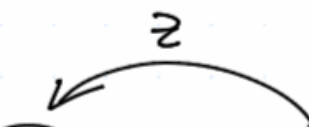


a celkem

1. hráč 3 stavový automat



2. hráč



---

Revision #3

Created 27 February 2023 07:06:04 by Sceptri

Updated 17 April 2023 20:33:23 by Sceptri