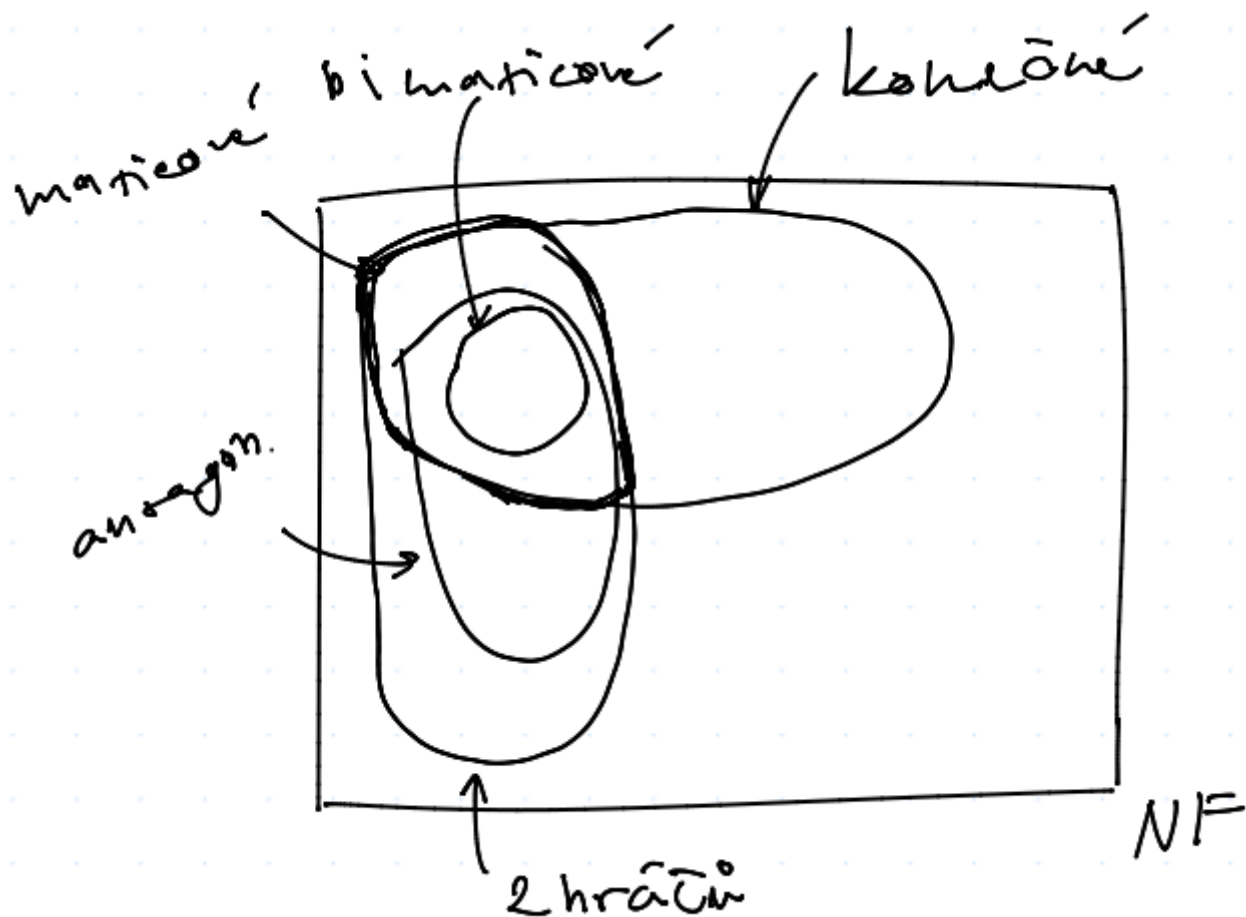


3. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left|\! \right| #1 \right|\!|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\nmtr#1{\begin{matrix} #1 \end{matrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}}
\xdef\mc#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}}
\xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi}
\xdef\Tagged#1{\text{#1}} \xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-
#1}{\text{#1}}} \xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}}
\xdef\conv#1{\mathrm{conv}\,, #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\,, #1}
\xdef\aff#1{\mathrm{aff}\,, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\,, #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\,,
#1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\,, #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1}
\xdef\interior#1{\mathrm{int}\,, #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\,, #1}
\xdef\grad#1{\mathrm{grad}\,, #1} \xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1}
\xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1} \xdef\hess#1{\nabla^2\,, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x
#1} \xdef\jacobx#1{D_x #1} \xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1}
\xdef\co#1{\mathrm{co}\,, #1} \xdef\iter#1{^{[#1]}} \xdef\str{^*} \xdef\spv{\mc V}
\xdef\civ{\mc U} \xdef\other#1{\hat{#1}} $$
```

Přehled her



Bimaticové hry 2x2

Mějme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

V případě dominování, např. $a > b$ a $c > d$, je to jednoduché... Tedy předpokládejme, že žádný řádek nedominuje pro 1. hráče a žádný sloupec pro 2. hráče.

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

A tedy $u(p,q) = \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$, $v(p,q) = \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$

Rovnováhy

Hráč 2 chce zabránit volit tomu prvnímu a tedy indifferenční rovnice je tvaru $u(0, q) = u(1, q) \implies c + d + q(1 - q) = a + b + q(1 - q) \implies (c - d)q + d = (a - b)q + b \implies (a - b - c + d)q = d - b \implies q = \frac{d - b}{a - b - c + d}$ a opačně $v(p, 0) = v(p, 1) \implies p + 1 - p = a + c \implies p = \frac{d - c}{a - b - c + d}$ $p(f - e - h + g) - h - g = 0 \implies p = \frac{g - h}{f - e - g + h}$

Pak tedy rovnovážná strategie ve smíšených strategiích je tvaru (p, q)

Dolní hodnota

Počítejme h_1^- a tedy bychom chtěli zjistit, jak máme volit p , aby nám bylo jedno, jak hraje 2. hráč $u(p, 0) = u(p, 1) \implies p + 1 - p = a + c \implies p = \frac{d - c}{a - b - c + d}$

Příklady her 2x2

Mějme $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ to $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ to $C = \begin{pmatrix} 4/7 & 1/7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Normalizace hry: První posuneme hru do kladných čísel, pak ji "zmenšíme" tak, že největší výhra 1 Tj.

- $\min A = 0$
- $\max A = 1$

⚠️ **Pozor**, pořád jsou to ekvivalentní hry!!

Přehled základních her 2x2

⚠️ Prozkoumejme čtveřici $(0, 1, 2, 3)$

- mince** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tato hra **není** symetrická, ale je "spravedlivá" (kdyby si vyměnili role, tak jim to nepomůže). Zřejmě ani jeden z hráčů nemá dominovanou strategii. Počítejme rovnováhu $q = \frac{1 - 0}{1 - 0 - 0 + 1} = \frac{1}{2}$ a rovnováha je $(p, q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Přičemž dolní hodnota $q = \frac{1 - 0}{1 - 0 - 0 + 1} = \frac{1}{2}$ a proto $h_1^- = \frac{1}{2}$
- na kočku a myš**
Kočka má na výběr z vytápěné/nevytápěné místnosti (světice/komora) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

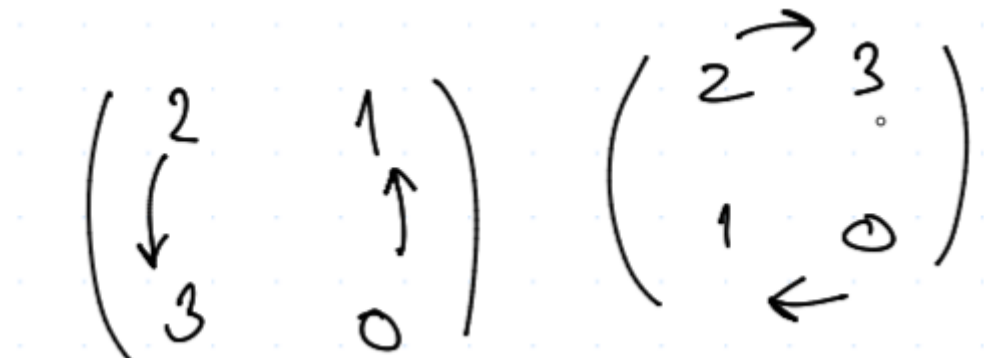
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

světice komora

A tedy máme situace $(3, 0) \sqquad (1, 3) \succ (0, 2) \sqquad (1, 2)$ Tato hra **není** ani antagonistická, ani s nulovým součtem. Evidentně existuje rovnováha pouze v smíšených situacích

3. líný rodič

Rodiče chtějí, aby potomek přežil, ale chceme se flákat a nechat to na tom druhém. Je to jistě symetrická hra $\begin{pmatrix} \text{stará se} & \text{nestará se} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\sqquad ()^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ a potom máme situace $(0, 0) \prec (2, 2)$, $\underbrace{(1, 3), (3, 1)}_{\text{rovnováhy v čistých}}$ Rozhodně nejde o hru, která aby antagonistická nebo s nulovým součtem.



Ve smíšených strategiích $q = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = \text{symetrie} = p$ a tedy $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2}$. Tedy je lepší, aby se oba rodiče starali, než kdyby to nechali na náhodu

4. na kuře

Jedeme proti sobě autem a pokud uhnu dřív, než soupeř, tak jsem prohrál a jsem zbabělec $\begin{pmatrix} \text{uhnu} & \text{zůstanu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -10 \end{pmatrix}$ Po normalizaci dostaneme hru tvaru **líný rodič**.

5. lov na jelena

Máme 2 lovce, kteří se nemohou domluvit. Pokud loví dohromady, tak mají šanci ulovit jelena, ale jeden sám ho neuloví. Navíc můžeme ulovit max 2 zajíce, kteří jsou v lese. $\begin{pmatrix} \text{jdu na jelena} & \text{jdu na zajíce} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ Potom situace rovnováhy jsou $(1, 1)$, $(3, 3)$, přičemž z ní "jednostraně" nemůžeme uhnout. Navíc $(3, 3)$ je dominující strategií (je optimální). Jediná **opatrná** strategie je zde jít si pro zajíce.

„Ilustruje, že příroda si může vybrat rovnováhu, která **není** nejlepší - přechod na nejlepší rovnováhu by vyžadoval domluvu.“

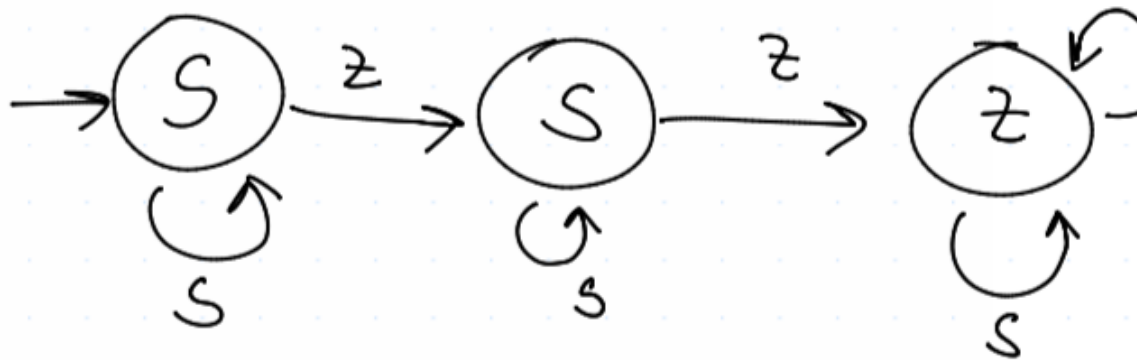
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ \uparrow & \downarrow \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \leftarrow 2 \\ 0 \rightarrow 1 \end{pmatrix}$$

6. věžňovo dilema

Máme 2 vězně, kde každý má na výběr buď mlčet (spolupracovat s spolupachatelem) nebo to zkusím hodit na spolupachatele (zradit). Jistě je to navíc symetrická hra $\text{matr}\{\text{spolupracovat} \setminus \text{zradit}\} \text{matr}\{-1 \ \& \ -3 \setminus 0 \ \& \ -2\} \rightarrow \text{matr}\{2 \ \& \ 0 \setminus 3 \ \& \ 1\}$ Po normalizaci si snažíme maximalizovat roky na svobodě (snažíme si ušetřit trest). Jistě navíc $\text{spolupracovat} \prec \text{zradit}$ Přičemž $(2,2)$ je jediná rovnovážná situace i ve smíšených strategiích.

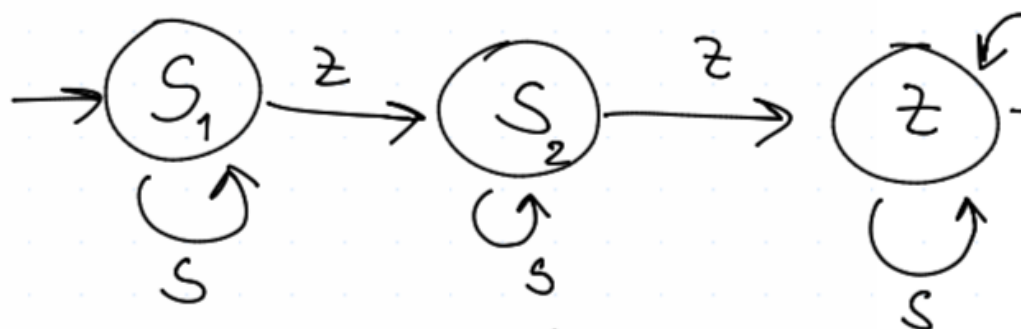
“ V případě opakované hry se rozhodujeme v závislosti na předchozích rozhodnutích. Můžeme řešit pomocí stavového automatu:

3 stavový automat

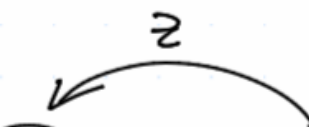


a celkem

1. hráč 3 stavový automat



2. hráč



Revision #3

Created 27 February 2023 07:06:04 by Sceptri

Updated 17 April 2023 20:33:23 by Sceptri