

2. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\|Vert #1 \right\|rVert}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}\,, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}\,, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}\,, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\,, #1}
\xdef\span#1{\mathrm{span}\,, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\,, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}\,, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}\,, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}\,, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}\,^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}\,_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2\,, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}\,, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{#1}} \xdef\str{\ast} \xdef\spv{\mc V} \xdef\civ{\mc U}
\xdef\other#1{\hat{#1}} $$
```

Definice $\mathcal{D}\{\text{KON}\}$ (Konečná hra)

Mějme množinu hráčů $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Pak hra $G = (M, X_i, u_i)$ je **konečná**, pokud jsou X_i **konečné**.

“ Na konečných hrách můžeme zavést tzv. *pravděpodobností rozšíření*

Definice $\mathcal{D}\{\text{SYM}\}$ (Symetrická hra)

Hra G 2 hráčů je symetrická právě tehdy, když $u(x, y) = v(y, x)$. V případě bimaticových her to je ekvivalentní s podmínkou $U^T = V$

Příklad (kámen, nůžky, papír)

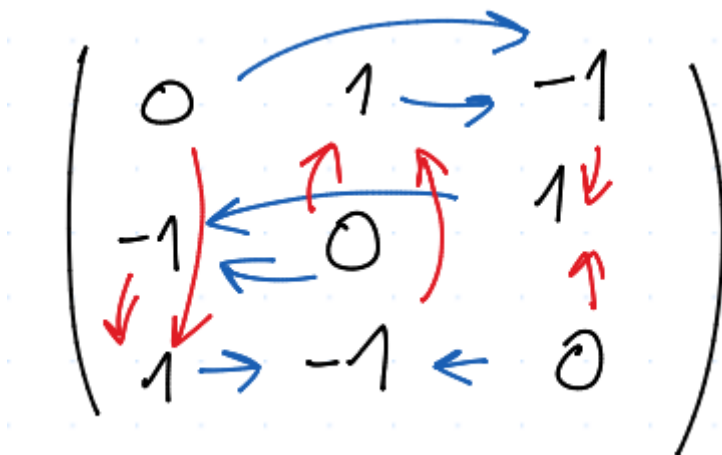
Mějme 2 hráče, tj. $N = \{1, 2\}$ a $X = Y = \{\mathcal{K}, \mathcal{N}, \mathcal{P}\}$. Jelikož je to *bimaticová hra*, tak výhra je dána jako $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Sloupce a řádky jsou indexovány K, N, P

Podívejme se na *Nashovu rovnováhu*, tj. $u(x,y) \geq u(\bar{x}, y) \quad \text{pro libovolné } \bar{x}$
 $v(x,y) \geq v(x, \bar{y}) \quad \text{pro libovolné } \bar{y}$

“ Aneb si odbočením do jiného řádku si nepomůžeme

Aby nastala rovnováha, tak musí $u(x,y) = 1$, tj. $v(x,y) = 1$. Ale druhý hráč by mohl hrát \bar{y} tak, že $v(x, \bar{y}) = 1$.



“ Zde si všimněme, že pokud půjdeme podle šipek, tak nikdy neskončíme

Dominance by zde znamenalo, že by jeden řádek, byl větší než nějaký jiný - aneb 2 řádky by musely být porovnatelné (jakožto vektory)

Dolní hodnota $h_1^- = \sup_x \inf_y u(x,y)$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{inf}} -1 \\ \xrightarrow{\quad} -1 \\ \xrightarrow{\quad} -1 \end{array} & \begin{array}{l} \\ \\ \downarrow \text{sup} \\ -1 \end{array} \\
 \begin{array}{l} \downarrow \text{sup} \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \end{array} \\
 & \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{inf}} 1 \\ \rightsquigarrow 1 \end{array} & \begin{array}{l} h_1^+ \\ h_1^- \end{array}
 \end{array}$$

a horní hodnota

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \downarrow \text{sup} \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \end{array} \\
 \begin{array}{l} \downarrow \text{sup} \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \end{array} \\
 & \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{inf}} 1 \\ \rightsquigarrow 1 \end{array} & \begin{array}{l} \\ \\ \end{array}
 \end{array}$$

Definice $D\{PRA\}$ (Pravděpodobnostní rozšíření)

Mějme **konečnou** hru $G = (M, X_i, u_i)$. Pak definujeme **pravděpodobnostní rozšíření** $G_{\text{str}} = (N, X_{\text{str}}, u_{\text{str}})$, kde $X_{\text{str}} = \{a_i^1 x_i^1 + a_i^2 x_i^2 + \dots + a_i^{m_i} x_i^{m_i} \mid x_i^j \in X_i; \text{ a } a_i^1 + \dots + a_i^{m_i} = 1; \text{ a } a_i^j > 0\}$ je množina **konvexních kombinací strategií** a pro výhry platí $u_{\text{str}}(\forall x_{\text{str}}) =$

$$\sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \prod X_i} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \cdots a_n^{j_n} \cdot u_i(x_1, \dots, x_n) \quad \square$$

Pokračování příkladu

Počítejme pravděpodobnostní rozšíření, tj. $u((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = p_1 q_1 \overbrace{u(K, K)}^0 + p_1 q_2 \overbrace{u(K, N)}^1 + p_1 (1 - q_1 - q_2) \overbrace{u(K, P)}^0 + \dots$ kde

- p_1 je pravděpodobnost zahrání K prvním hráčem
- p_2 je pravděpodobnost zahrání N prvním hráčem
- q_1 je pravděpodobnost zahrání K druhým hráčem
- q_2 je pravděpodobnost zahrání N druhým hráčem
- $1 - p_1 - p_2$ je pravděpodobnost zahrání P prvním hráčem

To ale můžeme napsat jako $u((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = \text{mtr}\{p_1 \ \& \ p_2 \ \& \ (1 - p_1 - p_2)\} \cup \text{mtr}\{q_1 \ \backslash \ q_2 \ \backslash \ 1 - q_1 - q_2\}$

Potom pro $\text{mtr}\{1/3 \ \& \ 1/3 \ \& \ 1/3\} \cup \text{mtr}\{0 \ \& \ 0 \ \& \ 0\} \cup \text{mtr}\{0 \ \& \ 0 \ \& \ 0\} \cup \text{mtr}\{q_1 \ \backslash \ q_2 \ \backslash \ 1 - q_1 - q_2\} = 0$ Tedy strategie $(1/3, 1/3, 1/3)$ a $(1/3, 1/3, 1/3)$ tvoří **rovnovážnou situaci** a navíc $h_1^{\{-\}} = h_1^{\{+\}} = 0$

Prvky $x_i \in X_i$ nazýváme **smíšené strategie** a původní strategie do tohoto nového prostoru vnoříme volbou pravděpodobnostního rozdělení $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. V tomto smyslu takovým strategiím říkáme **čisté strategie**

Věta $D\{NASH\}$ (Nashova)

Pravděpodobnostní rozšíření **každé konečné** hry má **rovnovážnou situaci**.

Důkaz

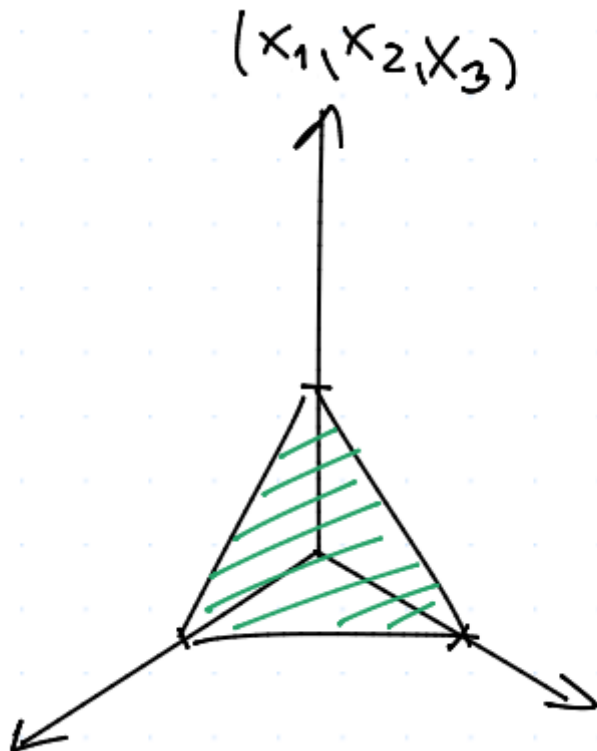
Mějme rovnováhu $\forall x$, tj. $u_i(\forall x) \geq u_i(x_i, x_{\text{other}})$ Dále označme $B_i(x_{\text{other}})$ **nejlepší odpovědi** na volbu protihráčů x_{other} . Tedy $\forall x$ je rovnováha právě tehdy, když $\forall i \in N: \quad x_i \in B_i(x_{\text{other}})$ Tedy $B_i: \prod_{j \neq i} X_j \rightarrow \mathcal{P}(X_i)$ a pokud dáme B_i dohromady jako $B = (B_i)_{i \in N}$, $\quad B: \prod_{i \in N} X_i \rightarrow \mathcal{P}(\prod_{i \in N} X_i)$

“ Pod \mathcal{P} zde myslíme "power set" (potenční množina) - pro jednu situaci může být více nejlepších strategií (odpovědí)

B je tedy (množinová) funkce na prostoru situací. Podle Kakutanyho věty o pevném bodě existuje $x \in B(x)$, což je rovnovážná situace. \blacksquare

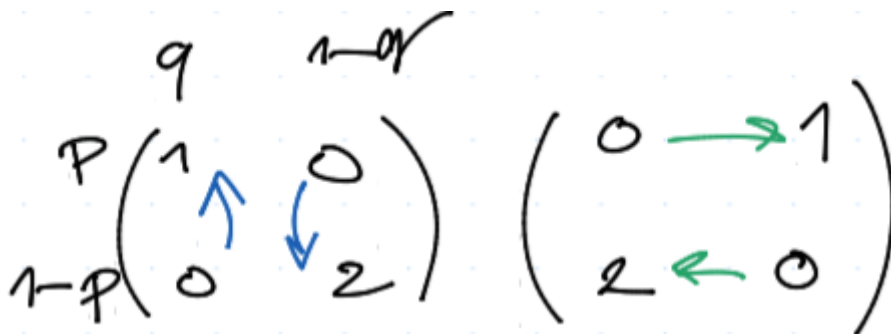
Mějme $u(x) = (x) \cup (y)$

V rovnovážné situaci nám budou vycházet stěny polyedru



Příklad - využití pro (bi)maticové hry

Mějme $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$



Tedy celkem $u(p,q) = pq + 2(1-p)(1-q)$ $v(p,q) = p(1-q) + 2(1-p)q$

“ Rovnováha je tak, že druhý hráč nemá kam pohnout (je mu to jedno)

Indiferenční rovnice - chceme zařídit, aby u nezáviselo na p a v na q

V našem případě $u(p,q) = p(\underbrace{q - 2 + 2q}_0) + 2(1-q) \implies 3q - 2 = 0 \implies q = \frac{2}{3}$
 $v(p,q) = q(\underbrace{-p + 2 - 2p}_0) + p \implies 3p - 2 = 0 \implies p = \frac{2}{3}$

\$\$

Tedy pravděpodobnostní rozdělení $((2/3, 1/3), (2/3, 1/3))$ tvoří **rovnovážnou situaci** a $u(vv x) = \frac{2}{3}, \quad v(vv x) = \frac{2}{3}$

Věta $D\{ANT\}$

U antagonistických her platí, že strategie je **optimální** právě tehdy, když je **opatrná**. Řekneme, že strategie x_i je **opatrná**, pokud zaručuje h_i^- .

“ Strategii nazveme **optimální**, pokud tato strategie realizuje nějakou rovnovážnou situaci

Pokud počítáme h_1^- , tak "zjišťujeme, co mi může soupeř provést", tj.
$$u(p, q) = q(p - 2 + 2q) + 2(1-p) \quad \&= \quad q(\underbrace{3p - 2}_0) + 2(1-p) \quad \&= \quad \frac{2}{3}$$

“ Při zvýšení p dá soupeř $q = 0$ a já si pohorším, naopak s menším p dává soupeř $q = 1$

Tedy $h_1^- = \frac{2}{3}$ a tato strategie je **opatrná**.

“ Pravděpodobnostní rozšíření na nekonečných prostorech se konstruuje přes míry a Riemann-Stieltjesův integrál

Revision #5

Created 20 February 2023 07:03:45 by Sceptri

Updated 17 April 2023 20:33:06 by Sceptri