

1. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2#de-#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{(\text{#1})}} \xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}}
\xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}\,, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}\,, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}\,, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\,, #1}
\xdef\span#1{\mathrm{span}\,, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\,, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}\,, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}\,, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}\,, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2\,, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}\,, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{#1}} \xdef\str{\^*} \xdef\spv{\mc V} \xdef\civ{\mc U}
\xdef\other#1{\hat{#1}} $$
```

“ V jakémsi smyslu zobecnění optimalizace, kdy máme více hráčů

Úvodní příklad (hra *ultimátum*)

Mějme $I = [0, 1]$ a 1. hráč si vybere $x \in I$ a 2. hráč říká **ano/ne** na vybrané x .

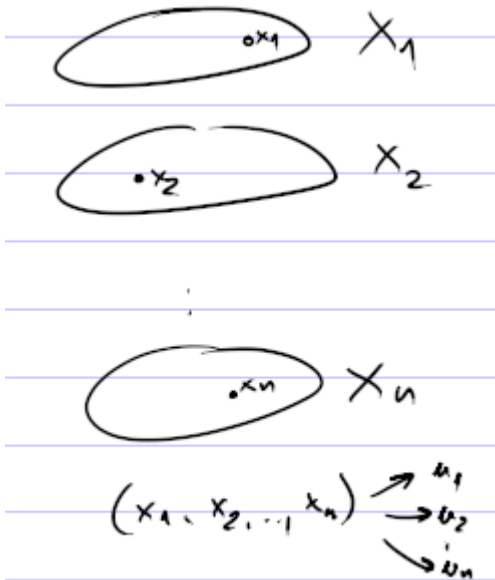
Hry v normální formě

Definice $D\{HNF\}$ (Hra v normální formě)

Mějme $n \in \mathbb{N}$ a $N = \{1, 2, \dots, n\}$ je **množina hráčů**. A zavedme

- X_i - množina strategií i -tého hráče
- u_i - výherní funkce i -tého hráče (\prod je zde *kartézský součin*)
 $u_i : \prod_{i \in N} X_i \rightarrow \mathbb{R}$

Navíc předpokládáme, že hráči hrají "rozumně" a "ví všechno" (tj. znají množiny strategií ostatních hráčů i jejich výherní funkce).



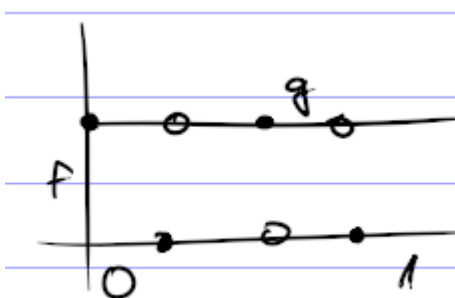
Řekneme, že strategie x_i **dominuje** y_i , značíme $x_i \succ y_i$. Navíc značíme $x_{\setminus i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ a pak $u_i(x_i, x_{\setminus i}) \geq u_i(y_i, x_{\setminus i}) \quad \forall x_{\setminus i} \quad \text{and} \quad \exists x_{\setminus i} \quad u_i(x_i, x_{\setminus i}) > u_i(y_i, x_{\setminus i})$

Strategie x je **nedominovaná**, jestliže **neexistuje** $y \succ x$.

Pokračování úvodního příkladů

$X_1 = I \setminus X_2 = \{0, 1\}^I$, kde $\{0, 1\}^I$ je množina zobrazení z I do $\{0, 1\}$. Pak výherní funkce jsou $u_1(x, f) = \begin{cases} x, & \text{pro } f(x) = 1 \\ 0, & \text{pro } f(x) = 0 \end{cases}$ $u_2(x, f) = \begin{cases} 1 - x, & \text{pro } f(x) = 1 \\ 0, & \text{pro } f(x) = 0 \end{cases}$

Pro 1. hráče jistě $0 \prec x$ pro $x \neq 0$, protože $u_i(0, f_{\setminus i}) = 0$ ale $u_i(x, f_{\setminus i}) = \begin{cases} x, & \text{pro } f(x) = 1 \\ 0, & \text{pro } f(x) = 0 \end{cases} \geq 0$ Pro 2. hráče $f \prec g$ nastane právě tehdy, když v g souhlasíme ve více případech, tj. $\forall x : f(x) = 1 \implies g(x) = 1 \quad \text{and} \quad \exists x : f(x) = 0 \quad \text{and} \quad g(x) = 1$ Jinak zapsáno $f < g$.



Nyní předpokládejme $x \preceq y, \forall x, y > 0, x \neq y$, tj. hledáme $f : u_1(x, f_{\hat{i}}) > u_1(y, f_{\hat{i}})$ a pak stačí libovolná f , že $f(x) = 1, f(y) = 0$, z čehož dostaneme $1 > 0$.

“ Z pohledu řešení hry je rozumné neuvažovat libovolné dominované strategie. Tímto jsme ji ale vytrhli z kontextu. Tedy zde by si odmítnutím "budoval prestiž" na další hry. Zde by totiž 1. hráč si mohl vzít (skoro) celý interval (rohlík) a podle nedominované strategie by to 2. hráč přijal.

Definice $D\{SIT\}$ (Situace)

Sitací nazveme n -tici $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i \in N} X_i$.

Řekneme, že situace $\forall x = (x_1, \dots, x_n)$ **dominuje podle Pareta** situaci $\forall y = (y_1, \dots, y_n)$, pokud $\forall i \in N : u_i(\forall x) \geq u_i(\forall y) \text{ AND } \exists i \in N : u_i(\forall x) > u_i(\forall y)$

Pokračování úvodního příkladů

Například $x = \frac{2}{3}$ a $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$.

V tomto případě pro (x, f) mají $u_1(x, f) = u_2(x, f) = 0$.

Naopak $y = \frac{1}{2}$ a $g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{2}{3} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$.

V tomto případě pro (x, f) mají $u_1(y, g) = u_2(y, g) = \frac{1}{2}$

A tedy $(x, f) \preceq (y, g)$.

“ Pokud se dohodnou v obou situacích, pak o jejich dominování nemůžeme mluvit - jeden dostane méně, druhý více.

Definice $D\{ZAR\}$ (Zaručování)

Hráč i **si zaručuje** x_i , pokud $\exists x_i : \forall x_{\text{other } i} : u_i(x_i, x_{\text{other } i}) \geq x_i$ **Dolní hodnotou hry** pro i -tého hráče je $h^-_i = \sup_{x_i} \inf_{x_{\text{other } i}} u_i(x_i, x_{\text{other } i})$

Horní hodnotou hry pro i -tého hráče je $h^+_i = \inf_{x_i} \sup_{x_{\text{other } i}} u_i(x_i, x_{\text{other } i})$

U dolní hodnoty "škodící" hráči dopředu ví, co zahrají (první volíme v infimu, potom až v supremu)

Pro úvodní příklad je $h_1^- = h_2^- = 0$ a $h_1^+ = h_2^+ = 0$

Definice $D\{ROV\}$ (Rovnovážná situace)

Řekneme, že $\forall x$ je **rovnovážná situace (Nashova rovnováha)**, pokud $\forall i \in N : \forall y_i \in X_i : u_i(x_i, x_{\setminus i}) \geq u_i(y_i, x_{\setminus i})$

“ Pro každého hráče samostatně je dobré hrát takto

Mějme (x, f) pro $x > 0$, pak pro $f(y) = \begin{cases} 1, & y \leq x \\ 0, & y > x \end{cases}$.
Změňme x to y , pak pokud

- $y < x$, pak $u_1(x, f) = x$ a $u_1(y, f) = y < x$
- $y > x$, pak $u_1(x, f) = x$ a $u_1(y, f) = 0 < x$

Nyní změňme f to g , pak pro $g(x) = 1$ je $u_2(x, f) = x = u_2(x, g)$. Naopak pro $g(x) = 0$ je $u_2(x, g) = 0 \leq u_2(x, f)$.

Hra 2 hráčů

Zde $n = 2$ a značme

- x_1 jako x , X_1 jako X
- x_2 jako y , X_2 jako Y
- u_1 jako u
- u_2 jako v

Antagonistická hra je taková, že pro situace (x, y) a (\bar{x}, \bar{y}) , tak pokud $u(x, y) \geq u(\bar{x}, \bar{y}) \iff v(x, y) \leq v(\bar{x}, \bar{y})$

“ Paretovská dominance vylučuje antagonistickou hru

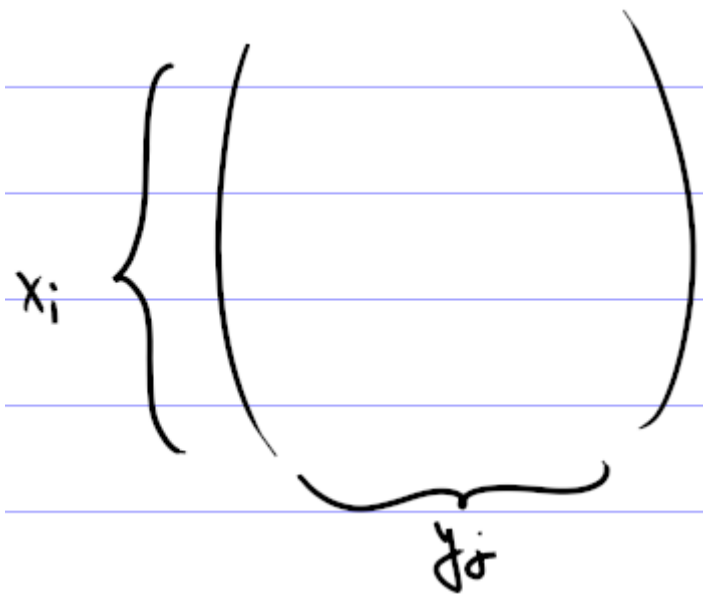
Hra s konstantním součtem nazýváme hru, kde $u(x, y) + v(x, y) = c$ a speciální případ jsou hry s **nulovým součtem**, kde $u(x, y) + v(x, y) = 0$

Šachy jsou hra s konstantním součtem (výhra - 1, remíza - 0.5). Naopak fotbal není (výhra - 3, remíza - 1), ale je antagonistická.

“ U kooperativních her mají hráči nějakým způsobem možnost dosahovat paretoovské dominance

Definice $\{D\{MAT\}$ (Maticová hra)

Mějme hru 2 hráčů, kde množiny X, Y jsou **konečné**. Pišme $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ AND $Y = \{y_1, \dots, y_l\}$ a pak situace uspořádáme do matice $X \times Y$ následovně



Matice A, B jsou pak **výherní matice** 1. a 2. hráče a $u(x_i, y_j) = A_{\{i,j\}}$.

Je-li navíc $A = -B$, pak jde o **maticovou hru**, což je hra s nulovým součtem.

“ **Pareto optimální** situace je taková, že **není** dominovaná podle Pareta