

# 1. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{\text{#1}}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2#eq-#1}{\text{#1}}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{\text{#1}}}
\xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}}
\xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}\, , #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}\, , #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}\, , #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\, , #1}
\xdef\span#1{\mathrm{span}\, , #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\, , #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\, , #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}\, , #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}\, , #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}\, , #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}\, ^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}\, _x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2\, , #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}\, , #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{#1}} \xdef\str{\^*} \xdef\spv{\mc V} \xdef\civ{\mc U}
\xdef\other#1{\hat{#1}} $$
```

“ V jakémsi smyslu zobecnění optimalizace, kdy máme více hráčů

## Úvodní příklad (hra *ultimátum*)

Mějme  $I = [0, 1]$  a 1. hráč si vybere  $x \in I$  a 2. hráč říká **ano/ne** na vybrané  $x$ .

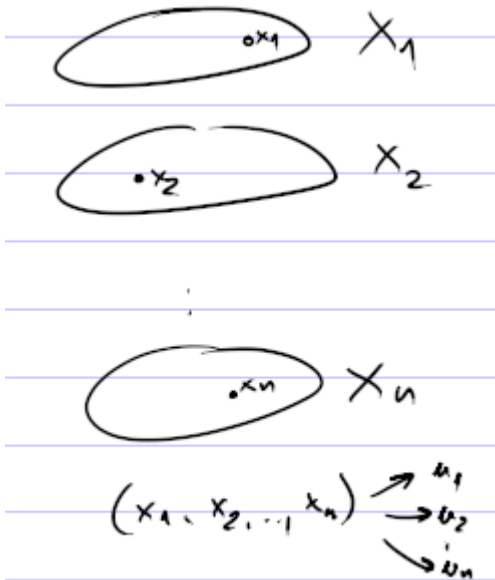
## Hry v normální formě

### Definice $D\{HNF\}$ (Hra v normální formě)

Mějme  $n \in \mathbb{N}$  a  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  je **množina hráčů**. A zavedme

- $X_i$  - množina strategií  $i$ -tého hráče
- $u_i$  - výherní funkce  $i$ -tého hráče ( $\prod$  je zde *kartézský součin*)  
 $u_i : \prod_{i \in N} X_i \rightarrow \mathbb{R}$

Navíc předpokládáme, že hráči hrají "rozumně" a "ví všechno" (tj. znají množiny strategií ostatních hráčů i jejich výherní funkce).



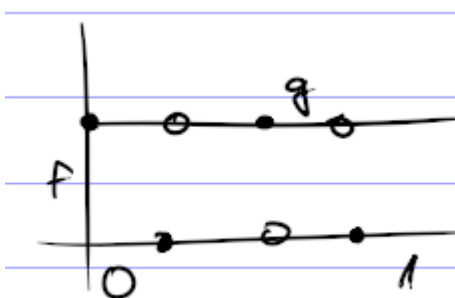
Řekneme, že strategie  $x_i$  **dominuje**  $y_i$ , značíme  $x_i \succ y_i$ . Navíc značíme  $x_{\setminus i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  a pak  $u_i(x_i, x_{\setminus i}) \geq u_i(y_i, x_{\setminus i}) \quad \forall x_{\setminus i} \quad \text{and} \quad \exists x_{\setminus i} \quad u_i(x_i, x_{\setminus i}) > u_i(y_i, x_{\setminus i})$

Strategie  $x$  je **nedominovaná**, jestliže **neexistuje**  $y \succ x$ .

## Pokračování úvodního příkladů

$X_1 = I \setminus X_2 = \{0, 1\}^I$ , kde  $\{0, 1\}^I$  je množina zobrazení z  $I$  do  $\{0, 1\}$ . Pak výherní funkce jsou  $u_1(x, f) = \begin{cases} x, & \text{pro } f(x) = 1 \\ 0, & \text{pro } f(x) = 0 \end{cases}$   $u_2(x, f) = \begin{cases} 1 - x, & \text{pro } f(x) = 1 \\ 0, & \text{pro } f(x) = 0 \end{cases}$

Pro 1. hráče jistě  $0 \prec x$  pro  $x \neq 0$ , protože  $u_i(0, f_{\setminus i}) = 0$  ale  $u_i(x, f_{\setminus i}) = \begin{cases} x, & \text{pro } f(x) = 1 \\ 0, & \text{pro } f(x) = 0 \end{cases} \geq 0$  Pro 2. hráče  $f \prec g$  nastane právě tehdy, když v  $g$  souhlasíme ve více případech, tj.  $\forall x : f(x) = 1 \implies g(x) = 1 \quad \text{and} \quad \exists x : f(x) = 0 \quad \text{and} \quad g(x) = 1$  Jinak zapsáno  $f < g$ .



Nyní předpokládejme  $x \preceq y, \forall x, y > 0, x \neq y$ , tj. hledáme  $f : u_1(x, f_{\hat{i}}) > u_1(y, f_{\hat{i}})$  a pak stačí libovolná  $f$ , že  $f(x) = 1, f(y) = 0$ , z čehož dostaneme  $1 > 0$ .

“ Z pohledu řešení hry je rozumné neuvažovat libovolné dominované strategie. Tímto jsme ji ale vytrhli z kontextu. Tedy zde by si odmítnutím "budoval prestiž" na další hry. Zde by totiž 1. hráč si mohl vzít (skoro) celý interval (rohlík) a podle nedominované strategie by to 2. hráč přijal.

## Definice $D\{SIT\}$ (Situace)

**Sitací** nazveme  $n$ -tici  $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i \in N} X_i$ .

Řekneme, že situace  $\forall x = (x_1, \dots, x_n)$  **dominuje podle Pareta** situaci  $\forall y = (y_1, \dots, y_n)$ , pokud  $\forall i \in N : u_i(\forall x) \geq u_i(\forall y) \text{ AND } \exists i \in N : u_i(\forall x) > u_i(\forall y)$

## Pokračování úvodního příkladů

Například  $x = \frac{2}{3}$  a  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$ .

V tomto případě pro  $(x, f)$  mají  $u_1(x, f) = u_2(x, f) = 0$ .

Naopak  $y = \frac{1}{2}$  a  $g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{2}{3} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$ .

V tomto případě pro  $(x, f)$  mají  $u_1(y, g) = u_2(y, g) = \frac{1}{2}$

A tedy  $(x, f) \preceq (y, g)$ .

“ Pokud se dohodnou v obou situacích, pak o jejich dominování nemůžeme mluvit - jeden dostane méně, druhý více.

## Definice $D\{ZAR\}$ (Zaručování)

Hráč  $i$  **si zaručuje**  $x$ , pokud  $\exists x_i : \forall x_{\text{other } i} : u_i(x_i, x_{\text{other } i}) \geq x$   
**Dolní hodnotou hry** pro  $i$ -tého hráče je  $h^-_i = \sup_{x_i} \inf_{x_{\text{other } i}} u_i(x_i, x_{\text{other } i})$

**Horní hodnotou hry** pro  $i$ -tého hráče je  $h^+_i = \inf_{x_i} \sup_{x_{\text{other } i}} u_i(x_i, x_{\text{other } i})$

U dolní hodnoty "škodící" hráči dopředu ví, co zahrají (první volíme v infimu, potom až v supremu)

Pro úvodní příklad je  $h_1^- = h_2^- = 0$  a  $h_1^+ = h_2^+ = 0$

## Definice $D\{ROV\}$ (Rovnovážná situace)

Řekneme, že  $\forall x$  je **rovnovážná situace (Nashova rovnováha)**, pokud  $\forall i \in N : \forall y_i \in X_i : u_i(x_i, x_{\setminus i}) \geq u_i(y_i, x_{\setminus i})$

“ Pro každého hráče samostatně je dobré hrát takto

Mějme  $(x, f)$  pro  $x > 0$ , pak pro  $f(y) = \begin{cases} 1, & y \leq x \\ 0, & y > x \end{cases}$ .  
Změňme  $x$  to  $y$ , pak pokud

- $y < x$ , pak  $u_1(x, f) = x$  a  $u_1(y, f) = y < x$
- $y > x$ , pak  $u_1(x, f) = x$  a  $u_1(y, f) = 0 < x$

Nyní změňme  $f$  to  $g$ , pak pro  $g(x) = 1$  je  $u_2(x, f) = x = u_2(x, g)$ . Naopak pro  $g(x) = 0$  je  $u_2(x, g) = 0 \leq u_2(x, f)$ .

## Hra 2 hráčů

Zde  $n = 2$  a značme

- $x_1$  jako  $x$ ,  $X_1$  jako  $X$
- $x_2$  jako  $y$ ,  $X_2$  jako  $Y$
- $u_1$  jako  $u$
- $u_2$  jako  $v$

**Antagonistická hra** je taková, že pro situace  $(x, y)$  a  $(\bar{x}, \bar{y})$ , tak pokud  $u(x, y) \geq u(\bar{x}, \bar{y}) \iff v(x, y) \leq v(\bar{x}, \bar{y})$

“ Paretovská dominance vylučuje antagonistickou hru

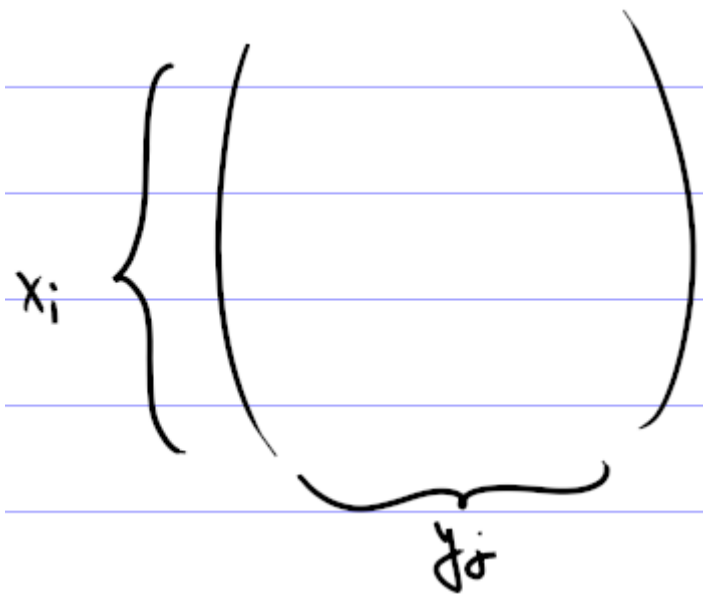
**Hra s konstantním součtem** nazýváme hru, kde  $u(x, y) + v(x, y) = c$  a speciální případ jsou hry s **nulovým součtem**, kde  $u(x, y) + v(x, y) = 0$

Šachy jsou hra s konstantním součtem (výhra - 1, remíza - 0.5). Naopak fotbal není (výhra - 3, remíza - 1), ale je antagonistická.

“ U kooperativních her mají hráči nějakým způsobem možnost dosahovat paretoovské dominance

## Definice $\{D\{MAT\}$ (Maticová hra)

Mějme hru 2 hráčů, kde množiny  $X, Y$  jsou **konečné**. Pišme  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$  AND  $Y = \{y_1, \dots, y_l\}$  a pak situace uspořádáme do matice  $X \times Y$  následovně



Matice  $A, B$  jsou pak **výherní matice** 1. a 2. hráče a  $u(x_i, y_j) = A_{\{i,j\}}$ .

Je-li navíc  $A = -B$ , pak jde o **maticovou hru**, což je hra s nulovým součtem.

“ **Pareto optimální** situace je taková, že **není** dominovaná podle Pareta