

# M7190 Teorie her

- [Úvodní informace](#)
- [1. přednáška](#)
- [2. přednáška](#)
- [3. přednáška](#)
- [4. přednáška](#)
- [5. přednáška](#)
- [6. přednáška](#)
- [7. přednáška](#)
- [8. přednáška](#)
- [Teorie sociálního výběru](#)
- [Hry v rozšířené formě \(poziční hry\)](#)
- [Hry s neúplnou informací](#)

# Úvodní informace

## Ukončení

- **písemná** zkouška
  - zpracování (nějaké) hry
  - 2 hodiny (klidně i déle)
- jsou k dispozici skripta ve studijních materiálech (je **povolená na zkoušku** - pouze tento text)
- maximálně 3 neomluvené absence

## Náplň

- hra v normální formě
  - hlavně tohle
  - maticové, případně bimaticové, hry
- opakované hry
  - konečné i nekonečné
- poziční hry
- na závěr semestru *koaliční hry* a funkce sociálního rozhodování (volební systémy)

# 1. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}}
\xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1}
\xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{[#1]}} \xdef\str{\^*} \xdef\spv{\mc{V}} \xdef\civ{\mc{U}}
\xdef\other#1{\hat{#1}} $$
```

“ V jakémsi smyslu zobecnění optimalizace, kdy máme více hráčů

## Úvodní příklad (hra *ultimátum*)

Mějme  $I = [0, 1]$  a 1. hráč si vybere  $x \in I$  a 2. hráč říká **ano/ne** na vybrané  $x$ .

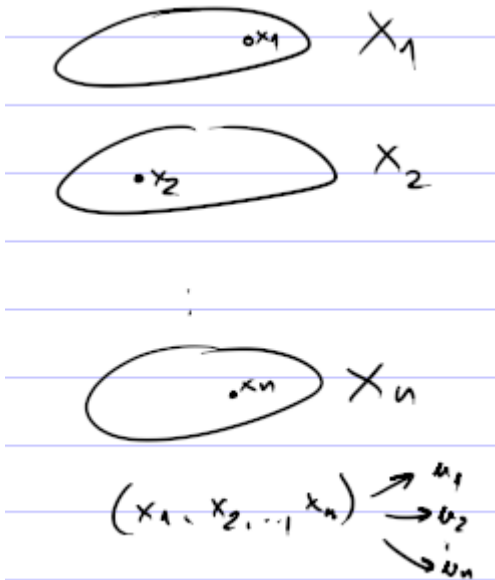
## Hry v normální formě

### Definice $D\{HNF\}$ (Hra v normální formě)

Mějme  $n \in \mathbb{N}$  a  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  je **množina hráčů**. A zavedme

- $X_i$  - množina strategií  $i$ -tého hráče
- $u_i$  - výherní funkce  $i$ -tého hráče ( $\prod$  je zde *kartézský součin*)  
 $u_i : \prod_{i \in N} X_i \rightarrow \mathbb{R}$

Navíc předpokládáme, že hráči hrají "rozumně" a "ví všechno" (tj. znají množiny strategií ostatních hráčů i jejich výherní funkce).



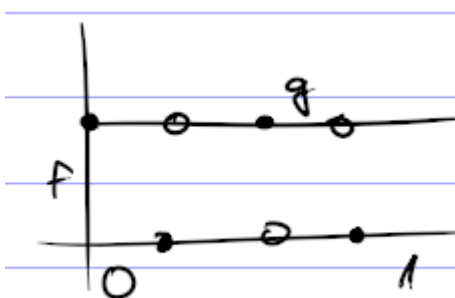
Řekneme, že strategie  $x_i$  **dominuje**  $y_i$ , značíme  $x_i \succ y_i$ . Navíc značíme  $x_{\setminus i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  a pak  $u_i(x_i, x_{\setminus i}) \geq u_i(y_i, x_{\setminus i}) \quad \forall x_{\setminus i} \quad \text{and} \quad \exists x_{\setminus i} \quad u_i(x_i, x_{\setminus i}) > u_i(y_i, x_{\setminus i})$

Strategie  $x$  je **nedominovaná**, jestliže **neexistuje**  $y \succ x$ .

## Pokračování úvodního příkladů

$X_1 = I \setminus X_2 = \{0, 1\}^I$ , kde  $\{0, 1\}^I$  je množina zobrazení z  $I$  do  $\{0, 1\}$ . Pak výherní funkce jsou  $u_1(x, f) = \begin{cases} x, & \text{pro } f(x) = 1 \\ 0, & \text{pro } f(x) = 0 \end{cases}$   $u_2(x, f) = \begin{cases} 1 - x, & \text{pro } f(x) = 1 \\ 0, & \text{pro } f(x) = 0 \end{cases}$

Pro 1. hráče jistě  $0 \prec x$  pro  $x \neq 0$ , protože  $u_i(0, f_{\setminus i}) = 0$  ale  $u_i(x, f_{\setminus i}) = \begin{cases} x, & \text{pro } f(x) = 1 \\ 0, & \text{pro } f(x) = 0 \end{cases} \geq 0$  Pro 2. hráče  $f \prec g$  nastane právě tehdy, když v  $g$  souhlasíme ve více případech, tj.  $\forall x : f(x) = 1 \implies g(x) = 1 \quad \text{and} \quad \exists x : f(x) = 0 \quad \text{and} \quad g(x) = 1$  Jinak zapsáno  $f < g$ .



Nyní předpokládejme  $x \preceq y, \forall x, y > 0, x \neq y$ , tj. hledáme  $f : u_1(x, f_{\hat{i}}) > u_1(y, f_{\hat{i}})$  a pak stačí libovolná  $f$ , že  $f(x) = 1, f(y) = 0$ , z čehož dostaneme  $1 > 0$ .

“ Z pohledu řešení hry je rozumné neuvažovat libovolné dominované strategie. Tímto jsme ji ale vytrhli z kontextu. Tedy zde by si odmítnutím "budoval prestiž" na další hry. Zde by totiž 1. hráč si mohl vzít (skoro) celý interval (rohlík) a podle nedominované strategie by to 2. hráč přijal.

## Definice $D\{SIT\}$ (Situace)

**Sitací** nazveme  $n$ -tici  $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i \in N} X_i$ .

Řekneme, že situace  $\forall x = (x_1, \dots, x_n)$  **dominuje podle Pareta** situaci  $\forall y = (y_1, \dots, y_n)$ , pokud  $\forall i \in N : u_i(\forall x) \geq u_i(\forall y) \text{ AND } \exists i \in N : u_i(\forall x) > u_i(\forall y)$

## Pokračování úvodního příkladů

Například  $x = \frac{2}{3}$  a  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$ .

V tomto případě pro  $(x, f)$  mají  $u_1(x, f) = u_2(x, f) = 0$ .

Naopak  $y = \frac{1}{2}$  a  $g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{2}{3} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$ .

V tomto případě pro  $(x, f)$  mají  $u_1(y, g) = u_2(y, g) = \frac{1}{2}$

A tedy  $(x, f) \preceq (y, g)$ .

“ Pokud se dohodnou v obou situacích, pak o jejich dominování nemůžeme mluvit - jeden dostane méně, druhý více.

## Definice $D\{ZAR\}$ (Zaručování)

Hráč  $i$  **si zaručuje**  $x_i$ , pokud  $\exists x_i : \forall x_{\text{other } i} : u_i(x_i, x_{\text{other } i}) \geq x_i$  **Dolní hodnotou hry** pro  $i$ -tého hráče je  $h^-_i = \sup_{x_i} \inf_{x_{\text{other } i}} u_i(x_i, x_{\text{other } i})$

**Horní hodnotou hry** pro  $i$ -tého hráče je  $h^+_i = \inf_{x_i} \sup_{x_{\text{other } i}} u_i(x_i, x_{\text{other } i})$

U dolní hodnoty "škodící" hráči dopředu ví, co zahrají (první volíme v infimu, potom až v supremu)

Pro úvodní příklad je  $h_1^- = h_2^- = 0$  a  $h_1^+ = h_2^+ = 0$

## Definice $D\{ROV\}$ (Rovnovážná situace)

Řekneme, že  $\forall x$  je **rovnovážná situace (Nashova rovnováha)**, pokud  $\forall i \in N : \forall y_i \in X_i : u_i(x_i, x_{\setminus i}) \geq u_i(y_i, x_{\setminus i})$

“ Pro každého hráče samostatně je dobré hrát takto

Mějme  $(x, f)$  pro  $x > 0$ , pak pro  $f(y) = \begin{cases} 1, & y \leq x \\ 0, & y > x \end{cases}$ .  
Změňme  $x$  to  $y$ , pak pokud

- $y < x$ , pak  $u_1(x, f) = x$  a  $u_1(y, f) = y < x$
- $y > x$ , pak  $u_1(x, f) = x$  a  $u_1(y, f) = 0 < x$

Nyní změňme  $f$  to  $g$ , pak pro  $g(x) = 1$  je  $u_2(x, f) = x = u_2(x, g)$ . Naopak pro  $g(x) = 0$  je  $u_2(x, g) = 0 \leq u_2(x, f)$ .

## Hra 2 hráčů

Zde  $n = 2$  a značme

- $x_1$  jako  $x$ ,  $X_1$  jako  $X$
- $x_2$  jako  $y$ ,  $X_2$  jako  $Y$
- $u_1$  jako  $u$
- $u_2$  jako  $v$

**Antagonistická hra** je taková, že pro situace  $(x, y)$  a  $(\bar{x}, \bar{y})$ , tak pokud  $u(x, y) \geq u(\bar{x}, \bar{y}) \iff v(x, y) \leq v(\bar{x}, \bar{y})$

“ Paretovská dominance vylučuje antagonistickou hru

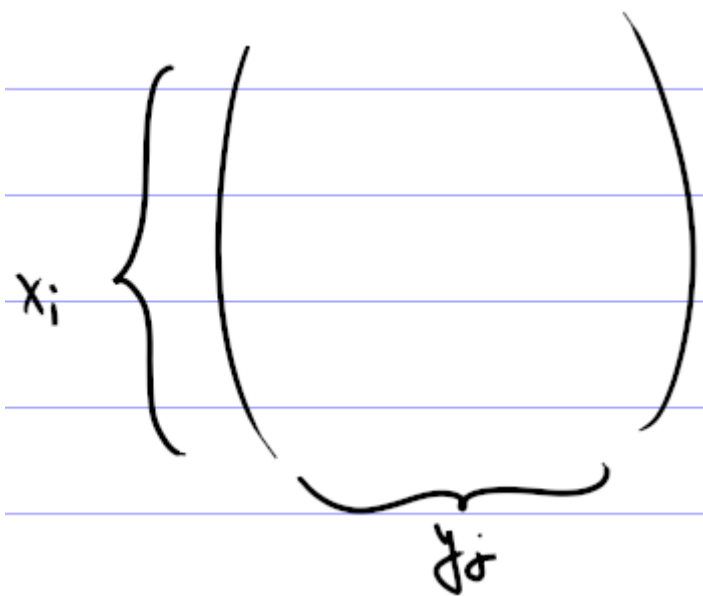
**Hra s konstantním součtem** nazýváme hru, kde  $u(x, y) + v(x, y) = c$  a speciální případ jsou hry s **nulovým součtem**, kde  $u(x, y) + v(x, y) = 0$

Šachy jsou hra s konstantním součtem (výhra - 1, remíza - 0.5). Naopak fotbal není (výhra - 3, remíza - 1), ale je antagonistická.

“ U kooperativních her mají hráči nějakým způsobem možnost dosahovat paretoovské dominance

## Definice $\{D\{MAT\}$ (Maticová hra)

Mějme hru 2 hráčů, kde množiny  $X, Y$  jsou **konečné**. Pišme  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$  AND  $Y = \{y_1, \dots, y_l\}$  a pak situace uspořádáme do matice  $X \times Y$  následovně



Matice  $A, B$  jsou pak **výherní matice** 1. a 2. hráče a  $u(x_i, y_j) = A_{\{i,j\}}$ .

Je-li navíc  $A = -B$ , pak jde o **maticovou hru**, což je hra s nulovým součtem.

“ **Pareto optimální** situace je taková, že **není** dominovaná podle Pareta

## 2. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}}
\xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1}
\xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{#1}} \xdef\str{\^*} \xdef\spv{\mc{V}} \xdef\civ{\mc{U}}
\xdef\other#1{\hat{#1}} $$
```

### Definice $\mathcal{D}\{\text{KON}\}$ (Konečná hra)

Mějme množinu hráčů  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Pak hra  $G = (M, X_i, u_i)$  je **konečná**, pokud jsou  $X_i$  **konečné**.

“ Na konečných hrách můžeme zavést tzv. *pravděpodobností rozšíření*

### Definice $\mathcal{D}\{\text{SYM}\}$ (Symetrická hra)

Hra  $G$  2 hráčů je symetrická právě tehdy, když  $u(x, y) = v(y, x)$ . V případě bimaticových her to je ekvivalentní s podmínkou  $U^T = V$

### Příklad (kámen, nůžky, papír)

Mějme 2 hráče, tj.  $N = \{1, 2\}$  a  $X = Y = \{\text{K}, \text{N}, \text{P}\}$ . Jelikož je to *bimaticová hra*, tak výhra je dána jako  $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

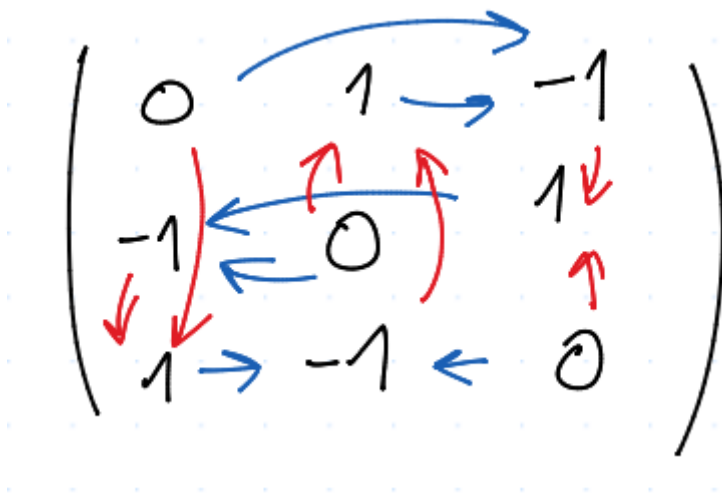


Sloupce a řádky jsou indexovány  $K, N, P$

Podívejme se na *Nashovu rovnováhu*, tj.  $u(x,y) \geq u(\bar{x}, y) \quad \text{pro libovolné } \bar{x}$   
 $v(x,y) \geq v(x, \bar{y}) \quad \text{pro libovolné } \bar{y}$

“ Aneb si odbočením do jiného řádku si nepomůžeme

Aby nastala rovnováha, tak musí  $u(x,y) = 1$ , tj.  $v(x,y) = 1$ . Ale druhý hráč by mohl hrát  $\bar{y}$  tak, že  $v(x, \bar{y}) = 1$ .



“ Zde si všimněme, že pokud půjdeme podle šipek, tak nikdy neskončíme

Dominance by zde znamenalo, že by jeden řádek, byl větší než nějaký jiný - aneb 2 řádky by musely být porovnatelné (jakožto vektory)

Dolní hodnota  $h_1^- = \sup_x \inf_y u(x,y)$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{inf}} -1 \\ \xrightarrow{\quad} -1 \\ \xrightarrow{\quad} -1 \end{array} & \begin{array}{l} \downarrow \text{sup} \\ 1 \end{array} \\
 & & \begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \end{array} \\
 & & \begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \xrightarrow{\text{inf}} -1 \\
 \xrightarrow{\quad} -1 \\
 \xrightarrow{\quad} -1 \\
 \downarrow \text{sup} \\
 -1 \quad h_1^- \\
 \xrightarrow{\text{inf}} 1 \\
 h_1^+
 \end{array}$$

a horní hodnota

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \downarrow \text{sup} \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \end{array} \\
 & \begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \end{array} \\
 & \begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \xrightarrow{\text{inf}} 1 \\
 \xrightarrow{\quad} 1 \\
 \xrightarrow{\quad} 1
 \end{array}$$

## Definice $\mathcal{D}\{\text{PRA}\}$ (Pravděpodobnostní rozšíření)

Mějme **konečnou** hru  $G = (M, X_i, u_i)$ . Pak definujeme **pravděpodobnostní rozšíření**  $G_{\text{str}} = (N, X_{\text{str}}, u_{\text{str}})$ , kde  $X_{\text{str}} = \{a_i^1 x_i^1 + a_i^2 x_i^2 + \dots + a_i^{m_i} x_i^{m_i} \mid x_i^j \in X_i; \text{ a } a_i^1 + \dots + a_i^{m_i} = 1; \text{ a } a_i^j > 0\}$  je množina **konvexních kombinací strategií** a pro výhry platí  $u_{\text{str}}(\bigvee x_{\text{str}}) = \sum_{(x_1^1, \dots, x_n^1) \in \prod X_i} a_1^1 x_1^1 a_2^1 x_2^1 \cdots$

$$a^{\{j_n\}_n} \cdot u_i(x^{\{j_1\}_1}, \dots, x^{\{j_1\}_n})$$

## Pokračování příkladu

Počítejme pravděpodobnostní rozšíření, tj.  $u((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = p_1 q_1 \overbrace{u(\mathcal{K}, \mathcal{K})}^0 + p_1 q_2 \overbrace{u(\mathcal{K}, \mathcal{N})}^1 + p_1 (1 - q_1 - q_2) u(\mathcal{K}, \mathcal{P}) + \dots$  kde

- $p_1$  je pravděpodobnost zahrání  $\mathcal{K}$  prvním hráčem
- $p_2$  je pravděpodobnost zahrání  $\mathcal{N}$  prvním hráčem
- $q_1$  je pravděpodobnost zahrání  $\mathcal{K}$  druhým hráčem
- $q_2$  je pravděpodobnost zahrání  $\mathcal{N}$  druhým hráčem
- $1 - p_1 - p_2$  je pravděpodobnost zahrání  $\mathcal{P}$  prvním hráčem

To ale můžeme napsat jako  $u((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = \text{mtr}\{p_1 \ \& \ p_2 \ \& \ (1 - p_1 - p_2)\} \cup \text{mtr}\{q_1 \ \backslash \ q_2 \ \backslash \ 1 - q_1 - q_2\}$

Potom pro  $\text{mtr}\{1/3 \ \& \ 1/3 \ \& \ 1/3\} \cup = \text{mtr}\{0 \ \& \ 0 \ \& \ 0\} \cup \text{mtr}\{0 \ \& \ 0 \ \& \ 0\} \cup \text{mtr}\{q_1 \ \backslash \ q_2 \ \backslash \ 1 - q_1 - q_2\} = 0$  Tedy strategie  $(1/3, 1/3, 1/3)$  a  $(1/3, 1/3, 1/3)$  tvoří **rovnovážnou situaci** a navíc  $h_1^{\{-\}} = h_1^{\{+\}} = 0$

Prvky  $x_i \in X_i$  nazýváme **smíšené strategie** a původní strategie do tohoto nového prostoru vnoříme volbou pravděpodobnostního rozdělení  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ . V tomto smyslu takovým strategiím říkáme **čisté strategie**

## Věta $\mathcal{D}\{\text{NASH}\}$ (Nashova)

Pravděpodobnostní rozšíření **každé konečné** hry má **rovnovážnou situaci**.

## Důkaz

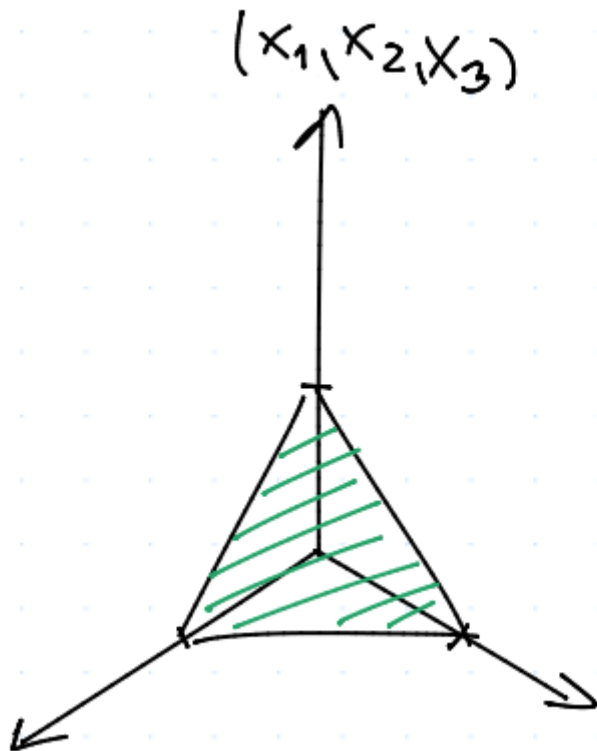
Mějme rovnováhu  $\forall x$ , tj.  $u_i(\forall x) \geq u_i(x_i, x_{\text{other } i})$  Dále označme  $B_i(x_{\text{other } i})$  **nejlepší odpovědi** na volbu protihráčů  $x_{\text{other } i}$ . Tedy  $\forall x$  je rovnováha právě tehdy, když  $\forall i \in N: \text{quad } x_i \in B_i(x_{\text{other } i})$  Tedy  $B_i: \prod_{j \neq i} X_j \rightarrow \mathcal{P}(X_i)$  a pokud dáme  $B_i$  dohromady jako  $B = (B_i)_{i \in N}$ ,  $\text{quad } B: \prod_{i \in N} X_i \rightarrow \prod_{i \in N} \mathcal{P}(X_i)$

“ Pod  $\mathcal{P}$  zde myslíme "power set" (potenční množina) - pro jednu situaci může být více nejlepších strategií (odpovědí)

$B$  je tedy (množinová) funkce na prostoru situací. Podle Kakutanyho věty o pevném bodě existuje  $x \in B(x)$ , což je rovnovážná situace.  $\blacksquare$

Mějme  $u(\forall x) = (x) \cup (y)$

V rovnovážně situaci nám budou vycházet stěny polyedru



## Příklad - využití pro (bi)maticové hry

Mějme  $U = \{1 \text{ \& } 0 \text{ \& } 0 \text{ \& } 2\}$ ,  $V = \{0 \text{ \& } 1 \text{ \& } 2 \text{ \& } 0\}$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 & q & 1-q \\
 \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}
 \end{array}
 &
 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Handwritten annotations: Blue arrows point from the top-left cell (1,0) to the bottom-left cell (0,0) and from the top-right cell (0,2) to the bottom-right cell (2,0). Green arrows point from the top-right cell (0,1) to the bottom-right cell (2,0) and from the bottom-left cell (0,0) to the top-right cell (0,1).

Tedy celkem  $u(p,q) = pq + 2(1-p)(1-q)$   $v(p,q) = p(1-q) + 2(1-p)q$

“ Rovnováha je tak, že druhý hráč nemá kam pohnout (je mu to jedno)

**Indiferenční rovnice** - chceme zařídit, aby  $u$  nezáviselo na  $p$  a  $v$  na  $q$

V našem případě  $u(p,q) = p(\underbrace{q - 2 + 2q}_0) + 2(1-q) \implies 3q - 2 = 0 \implies q = \frac{2}{3}$   
 $v(p,q) = q(\underbrace{-p + 2 - 2p}_0) + p \implies 3p - 2 = 0 \implies p = \frac{2}{3}$

Tedy pravděpodobnostní rozdělení  $((2/3, 1/3), (2/3, 1/3))$  tvoří **rovnovážnou situaci** a  $u(v, x) = \frac{2}{3}, \quad v(v, x) = \frac{2}{3}$

## Věta $D_{ANT}$

U antagonistických her platí, že strategie je **optimální** právě tehdy, když je **opatrná**. Řekneme, že strategie  $x_i$  je **opatrná**, pokud zaručuje  $h_i^-$ .

“ Strategii nazveme **optimální**, pokud tato strategie realizuje nějakou rovnovážnou situaci

Pokud počítáme  $h_1^-$ , tak "zjišťujeme, co mi může soupeř provést", tj. 
$$u(p, q) = q(p - 2 + 2q) + 2(1-p) \quad \&= \quad q(\underbrace{3p - 2}_0) + 2(1-p) \quad \&= \quad \frac{2}{3}$$

“ Při zvýšení  $p$  dá soupeř  $q = 0$  a já si pohorším, naopak s menším  $p$  dává soupeř  $q = 1$

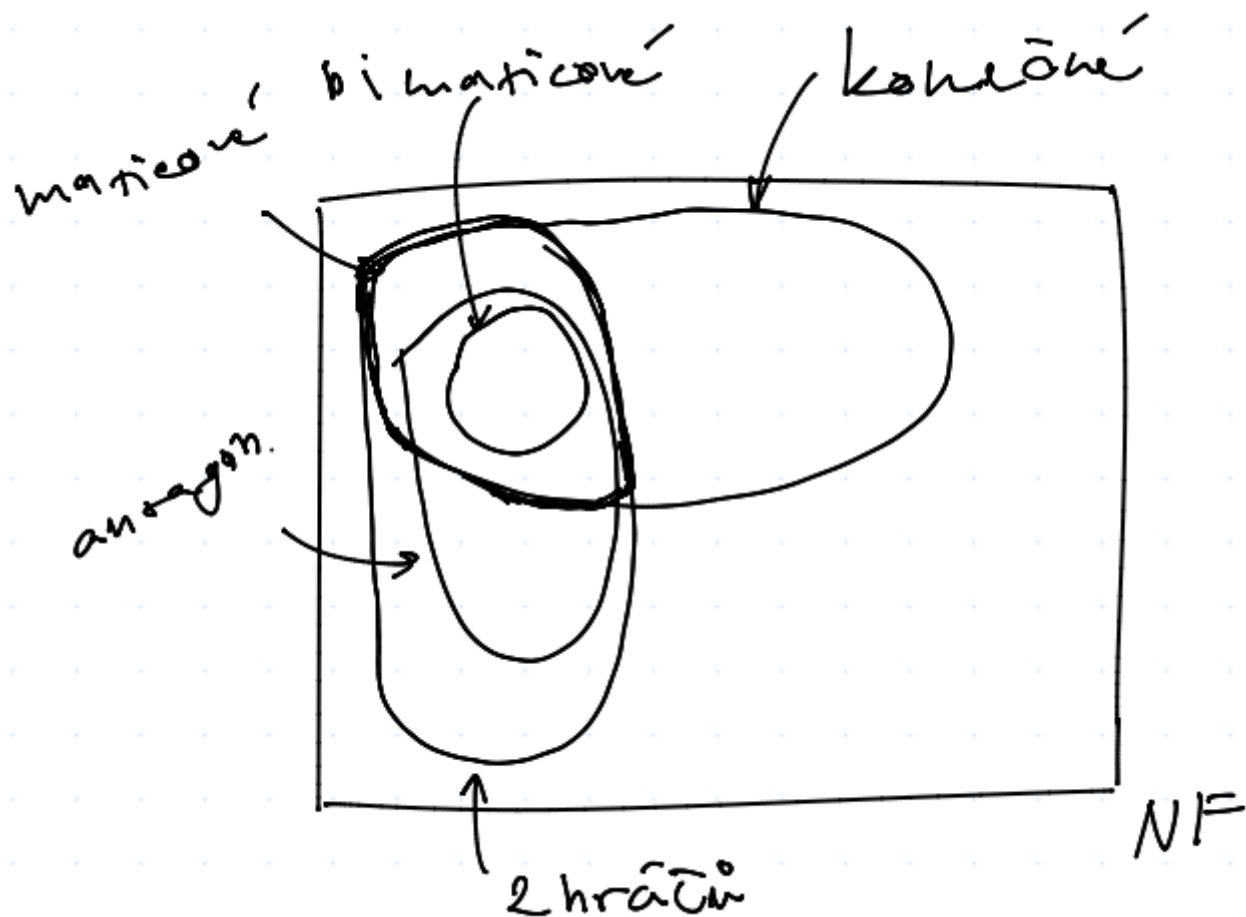
Tedy  $h_1^- = \frac{2}{3}$  a tato strategie je **opatrná**.

“ Pravděpodobnostní rozšíření na nekonečných prostorech se konstruuje přes míry a Riemann-Stieltjesův integrál

# 3. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\nmtr#1{\begin{matrix} #1 \end{matrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}}
\xdef\mcal#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}}
\xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi}
\xdef\Tagged#1{(\text{#1})} \xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-
#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}}
\xdef\conv#1{\mathrm{conv}\,, #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\,, #1}
\xdef\aff#1{\mathrm{aff}\,, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\,, #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\,,
#1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\,, #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1}
\xdef\interior#1{\mathrm{int}\,, #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\,, #1}
\xdef\grad#1{\mathrm{grad}\,, #1} \xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1}
\xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1} \xdef\hess#1{\nabla^2\,, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x
#1} \xdef\jacobx#1{D_x #1} \xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1}
\xdef\co#1{\mathrm{co}\,, #1} \xdef\iter#1{^{[#1]}} \xdef\str{^*} \xdef\spv{\mcal V}
\xdef\civ{\mcal U} \xdef\other#1{\hat{#1}} $$
```

Přehled her



## Bimaticové hry 2x2

Mějme  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $\quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

V případě dominování, např.  $a > b$  a  $c > d$ , je to jednoduché... Tedy předpokládejme, že žádný řádek nedominuje pro 1. hráče a žádný sloupec pro 2. hráče.

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

A tedy  $u(p,q) = \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$ ,  $v(p,q) = \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$

## Rovnováhy

Hráč 2 chce zabránit volit tomu prvnímu a tedy indifferenční rovnice je tvaru  $u(0, q) = u(1, q) \implies c + q(1-q) = a + b(q(1-q) + (c-d)q + d) = (a-b)q + b + (a-b-c+d)q = d-b$   
 $q = \frac{d-b}{a-b-c+d}$  a opačně  $v(p, 0) = v(p, 1) \implies p + 1-p = p + (1-p)f = p + (1-p)g \implies p(f-e-h+g) - h-g = 0 \implies p = \frac{g-h}{f-e-g+h}$

Pak tedy rovnovážná strategie ve smíšených strategiích je tvaru  $(p, q)$

## Dolní hodnota

Počítejme  $h_1^-$  a tedy bychom chtěli zjistit, jak máme volit  $p$ , aby nám bylo jedno, jak hraje 2. hráč  $u(p, 0) = u(p, 1) \implies p + 1-p = p + (1-p)b = p + (1-p)a \implies p = \frac{d-c}{a-b-c+d}$

## Příklady her 2x2

Mějme  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$  to  $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$  to  $\begin{pmatrix} 4/7 & 1/7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Normalizace hry:** První posuneme hru do kladných čísel, pak ji "zmenšíme" tak, že největší výhra 1 Tj.

- $\min A = 0$
- $\max A = 1$

⚡ **Pozor**, pořád jsou to ekvivalentní hry!!

## Přehled základních her 2x2

⚡ Prozkoumejme čtveřici  $(0, 1, 2, 3)$

- mince**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\text{quad } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  tato hra **není** symetrická, ale je "spravedlivá" (kdyby si vyměnili role, tak jim to nepomůže). Zřejmě ani jeden z hráčů nemá dominovanou strategii. Počítejme rovnováhu  $q = \frac{1-0}{1-0-0+1} = \frac{1}{2}$  a rovnováha je  $(p, q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Přičemž dolní hodnota  $q = \frac{1-0}{1-0-0+1} = \frac{1}{2}$  a proto  $h_1^- = \frac{1}{2}$
- na kočku a myš**  
Kočka má na výběr z vytápěné/nevytápěné místnosti (světice/komora)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\text{quad } B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

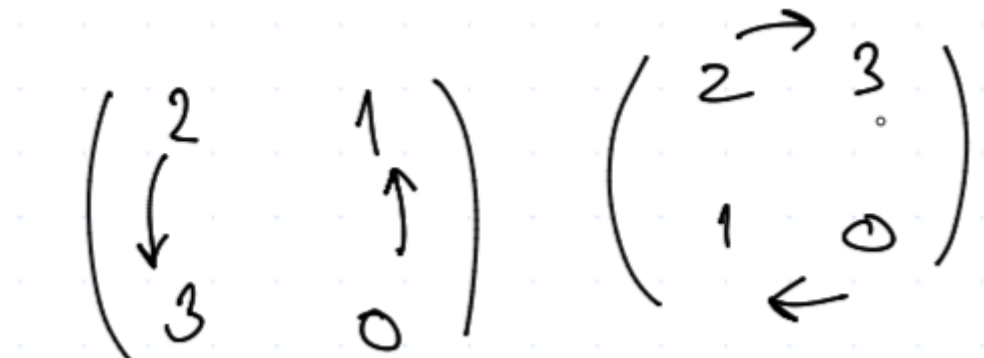
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$



A tedy máme situace  $(3, 0) \sqquad (1, 3) \succ (0, 2) \sqquad (1, 2)$  Tato hra **není** ani antagonistická, ani s nulovým součtem. Evidentně existuje rovnováha pouze v smíšených situacích

### 3. líný rodič

Rodiče chtějí, aby potomek přežil, ale chceme se flákat a nechat to na tom druhém. Je to jistě symetrická hra  $\text{mtr}\{\text{stará se} \setminus \text{nestará se}\} \text{mtr}\{2 \setminus 3 \setminus 0\}$ ,  $\text{mtr}\{2 \setminus 3 \setminus 1 \setminus 0\}$  a potom máme situace  $(0, 0) \prec (2, 2)$ ,  $\underbrace{(1, 3), (3, 1)}_{\text{rovnováhy v čistých}}$  Rozhodně nejde o hru, která aby antagonistická nebo s nulovým součtem.



Ve smíšených strategiích  $q = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = \text{symetrie} = p$  a tedy  $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \text{mtr}\{\frac{1}{2} \setminus \frac{1}{2}\} = \frac{3}{2}$ . Tedy je lepší, aby se oba rodiče starali, než kdyby to nechali na náhodu

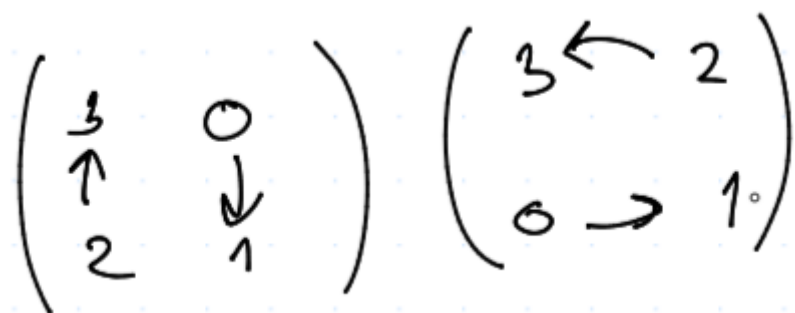
### 4. na kuře

Jedeme proti sobě autem a pokud uhnu dřív, než soupeř, tak jsem prohrál a jsem zbabělec  $\text{mtr}\{\text{uhnu} \setminus \text{zůstanu}\} \text{mtr}\{0 \setminus -1 \setminus 1 \setminus -10\}$  Po normalizaci dostaneme hru tvaru **líný rodič**.

### 5. lov na jelena

Máme 2 lovce, kteří se nemohou domluvit. Pokud loví dohromady, tak mají šanci ulovit jelena, ale jeden sám ho neuloví. Navíc můžeme ulovit max 2 zajíce, kteří jsou v lese.  $\text{mtr}\{\text{jdu na jelena} \setminus \text{jdu na zajíce}\} \text{mtr}\{3 \setminus 0 \setminus 2 \setminus 1\} \setminus \text{and} \setminus \text{mtr}\{3 \setminus 2 \setminus 0 \setminus 1\}$  Potom situace rovnováhy jsou  $(1, 1), (3, 3)$ , přičemž z ní "jednostraně" nemůžeme uhnout. Navíc  $(3, 3)$  je dominující strategií (je optimální). Jediná **opatrná** strategie je zde jít si pro zajíce.

„Ilustruje, že příroda si může vybrat rovnováhu, která **není** nejlepší - přechod na nejlepší rovnováhu by vyžadoval domluvu.“

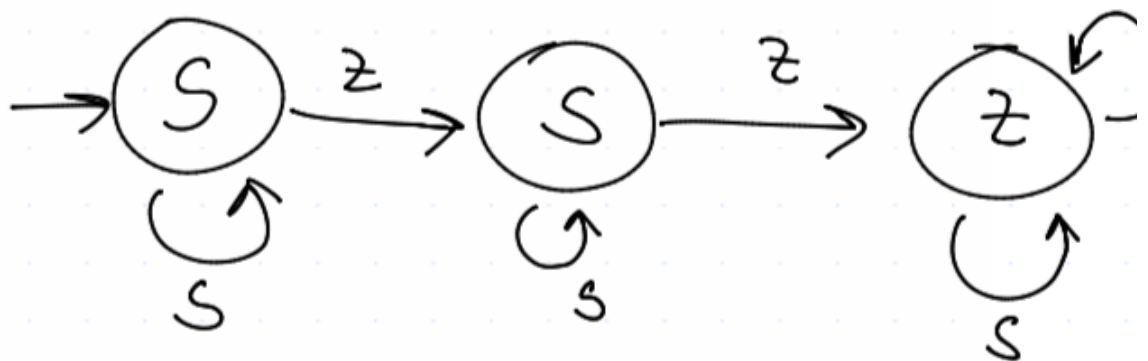


## 6. věžňovo dilema

Máme 2 vězně, kde každý má na výběr buď mlčet (spolupracovat s spolupachatelem) nebo to zkusím hodit na spolupachatele (zradit). Jistě je to navíc symetrická hra  $\begin{matrix} & \text{spolupracovat} & \text{zradit} \\ \text{spolupracovat} & -1 & -3 \\ \text{zradit} & 0 & -2 \end{matrix}$  Po normalizaci si snažíme maximalizovat roky na svobodě (snažíme si ušetřit trest). Jistě navíc  $\begin{matrix} & \text{spolupracovat} & \text{zradit} \\ \text{spolupracovat} & 2 & 0 \\ \text{zradit} & 3 & 1 \end{matrix}$  Přičemž  $(2,2)$  je jediná rovnovážná situace i ve smíšených strategiích.

V případě opakované hry se rozhodujeme v závislosti na předchozích rozhodnutích. Můžeme řešit pomocí stavového automatu:

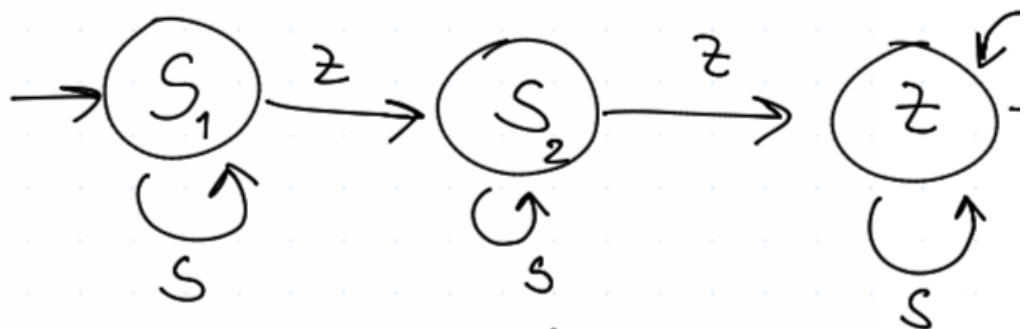
3 stavový automat



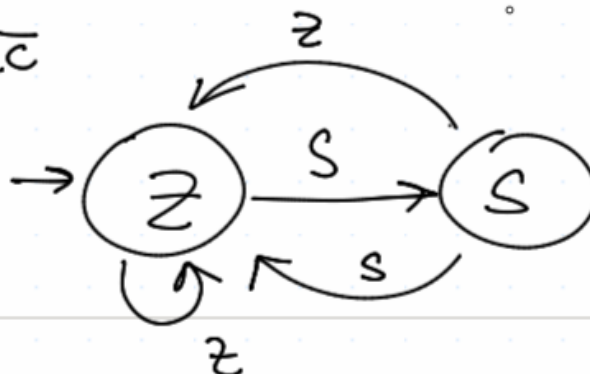
a celkem

3 stavový automat

1. hráč



2. hráč



Celkem (v situacích)

Příčemž automaty jsou "strategie s omezenou pamětí"

# 4. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\mtr#1{\begin{matrix} #1 \end{matrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}}
\xdef\mcal#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}}
\xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi}
\xdef\Tagged#1{\text{#1}} \xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-
#1}{\text{#1}}} \xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}}
\xdef\conv#1{\mathrm{conv}\,, #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\,, #1}
\xdef\aff#1{\mathrm{aff}\,, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\,, #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\,,
#1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\,, #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1}
\xdef\interior#1{\mathrm{int}\,, #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\,, #1}
\xdef\grad#1{\mathrm{grad}\,, #1} \xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1}
\xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1} \xdef\hess#1{\nabla^2\,, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x
#1} \xdef\jacobx#1{D_x #1} \xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1}
\xdef\co#1{\mathrm{co}\,, #1} \xdef\iter#1{^{[#1]}} \xdef\str{^*} \xdef\spv{\mcal V}
\xdef\civ{\mcal U} \xdef\other#1{\hat{#1}} $$
```

## Opakované hry

“ Znovu definujeme **strategii**, jako celkový vzorec chování (algoritmus, kterým vybíráme **akci** pro dané kolo). **Akce** je výběr pro dané kolo.

Rozdělme si je na

- *konečné opakování*
- *nekonečné opakování*

## Konečné vězňovo dilemma

Mějme matici hry 
$$\begin{matrix} & \text{spolupracovat} & \text{zradit} \\ \begin{matrix} \text{2 \& 0} \\ \text{3 \& 1} \end{matrix} & \end{matrix}$$

Nyní předpokládejme, že ji budeme hrát  $2 \times$ :

- Jistě v 2. druhém kole bude výhodné zradit ( $ZZ$ )
- Jelikož v 2. kole dávalo smysl pouze zradit, tak i v prvním kole budeme zrazovat, protože 2. kolo stejně nijak neovlivníme

Obecně pro konečné opakování vězňova dilematu vede k výsledku  $ZZ$  pro všechna kola

## Nekonečné vězňovo dilema

Můžeme interpretovat, že nevíme, které kolo je poslední.

Celkovou výhru si definujeme jako:

1. Mějme výhry prvního hráče v  $i$ -tém kole  $u_1, u_2, \dots$  Pak vezmeme **částečný průměr**, který pošleme do limity, jako výhru, tj.  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$  Avšak pro například řadu výher  $1, 0, \underbrace{1}_2, 0, \underbrace{1}_4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \underbrace{1}_3, \dots$

“ Tedy částečné průměry **nefungují obecně**

2. Pomocí **disktování**

Zavedme  $\delta \in (0,1)$  (diskontní faktor) a pak  $\bar{u}_1 = \delta u_1, \bar{u}_2 = \delta^2 u_2, \dots, \bar{u}_n = \delta^n u_n$

“ Tedy v tomto případě mají větší hodnotu "peníze" (výhra), která je teď. Navíc je degradace hry pořád stejná  
Velké  $\delta$  můžeme interpretovat jako "strádatele"... Pro malé  $\delta$  "žije hráč okamžikem"  $u = \delta u_1 + \delta^2 u_2 + \dots$  Lze vždy sečíst

3. **Overtaking**

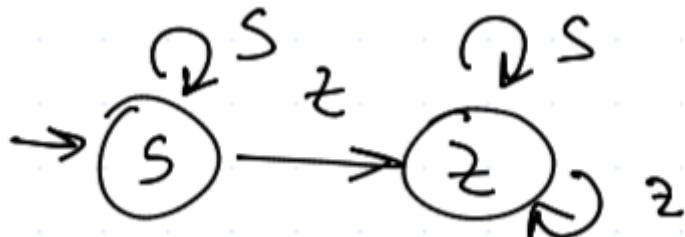
Pro 2 posloupnosti výher  $u_1, u_2, \dots, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots$  Pak řekneme, že  $u_i \succ \bar{u}_i$  pokud  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (u_1 - \bar{u}_1) + \dots + (u_n - \bar{u}_n) > 0$

“ Z pohledu psychologie je pro nás důležitější výsledek "ve většině případů"

Jsou-li strategie hráčů dány konečnými automaty, pak lze výhry sečíst částečným průměrováním.

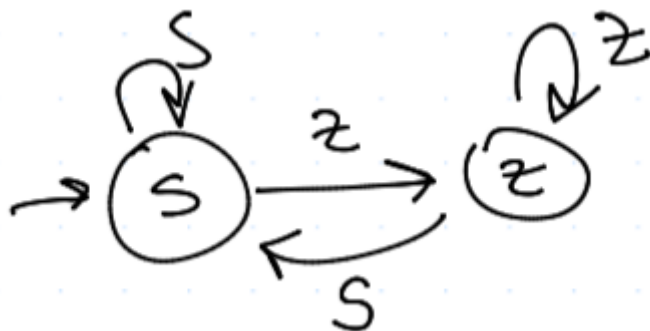
# Vybrané strategie pro věžňovo dilema

## Spoušť (Trigger)

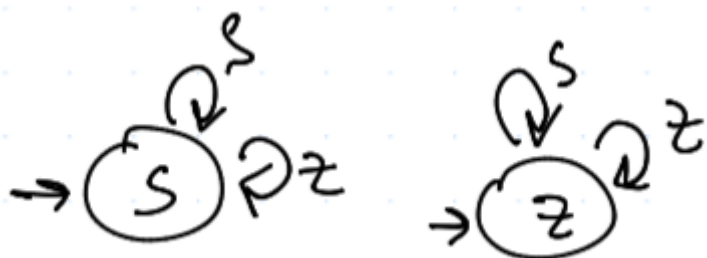


“ Hodí se pro existenční důkazy

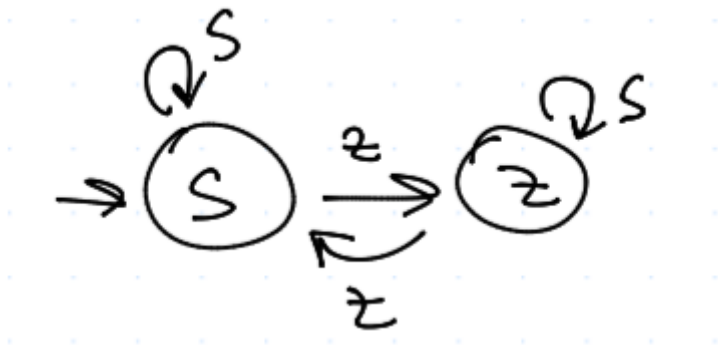
## Oko za oko (TFT - Tit For Tat)



## Hrdlička a Jestřáb (Always Cooperate (AIC) / Always Defect (AIID))



## Pavlov (pes) (Win Stay Lose Switch - WSLS)



Často zavádíme šum  $\epsilon > 0$  a předpokládáme, že hráč dodrží svou strategii (plán své strategie) s pravděpodobností  $1 - \epsilon$ , tj. s pravděpodobností  $\epsilon$  dojde k zahrání opačné akce.

Podívejme se nyní na

## TFT vs. TFT

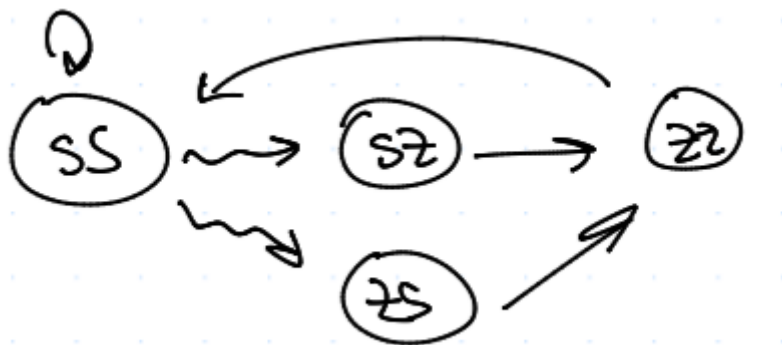
Možné stavy



Počítejme výhru prvního částečným průměrováním  $u = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{0 + 3}{2} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{2}$

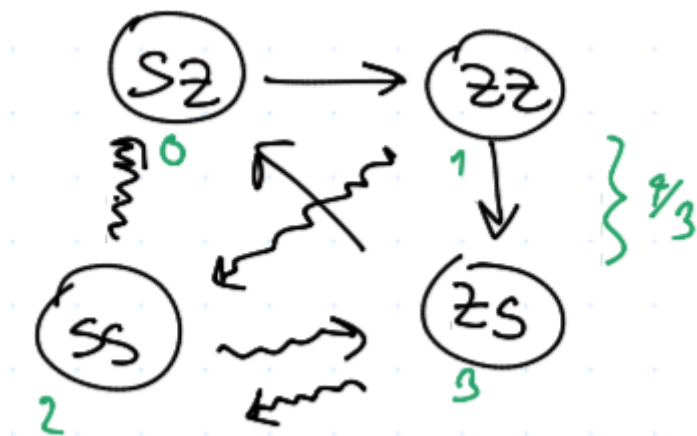
“Oko za oko je trochu moc přísné

## WSLS vs. WSLS



Přičemž  $u \approx 2 - \sqrt{x}$

## TFT vs. WSL



## Turnaj

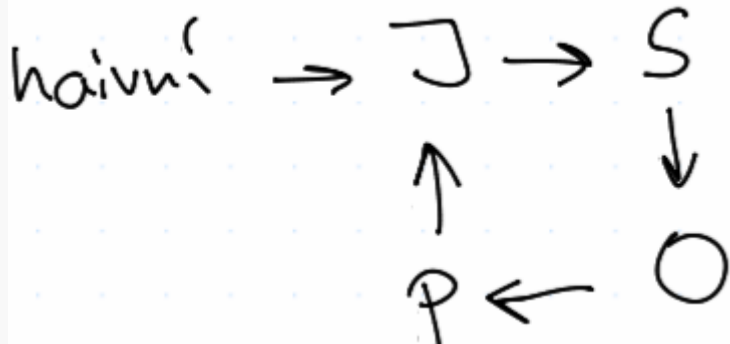
X	S	O	H	J	P	$\sum$
S	$\approx 1$	$\approx 1$	$\approx 5/2$	$\approx 1$	$\approx 1$	$\approx \frac{13}{2}$
O						
H						
J					2	
P				$\frac{1}{2}$		

“ Pokud je hodně "pes" strategií v Turnaji, tak vyhraje, protože spolu dobře spolupracuje



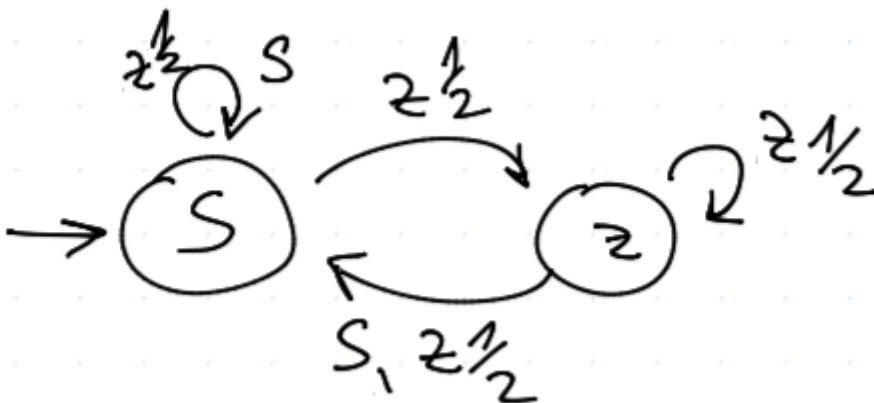
V "evoluční/populační" variantě, tj. necháváme potomky dobrých strategií v turnaji, často vyhraje pes, protože hraje dobře sám se sebou

Naopak je vidět, že Jestřáb umí vytěžit psa



## Strategie se stochastickými přestupy

Šlechtné oko



nebo můžeme udělat novou parametrizaci

- $p_0$  - pravděpodobnost spoluprací na začátku
  - $1 - p_0$  - začnu zradou
- $p_1$  - pst. přechodu od SS ke spolupráci
- $p_2$  - pst. přechodu od SZ ke spolupráci
- $p_3$  - pst. přechodu od ZS ke spolupráci
- $p_4$  - pst. přechodu od ZZ ke spolupráci

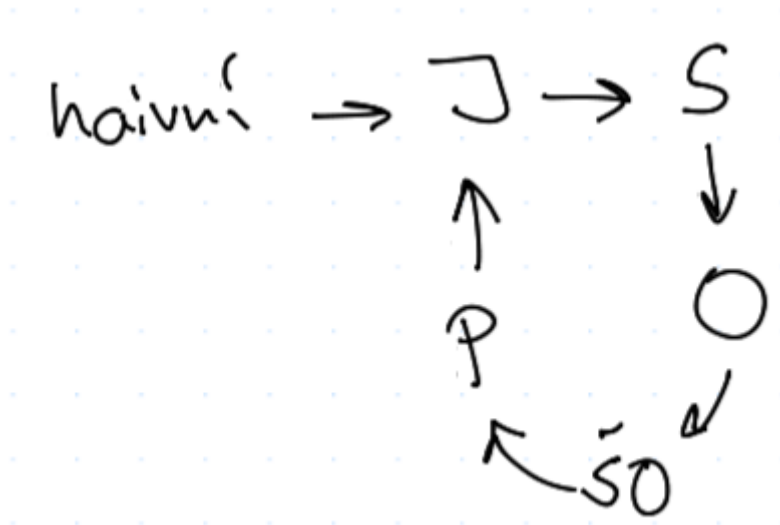
	$\text{to } S$	SS $\text{to } S$	SZ $\text{to } S$	ZS $\text{to } S$	ZZ $\text{to } S$	
X	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	šum

	$\$to\$ S$	$SS \$to\$ S$	$SZ \$to\$ S$	$ZS \$to\$ S$	$ZZ \$to\$ S$	
J	0	0	0	0	0	$$(\vee, \vee, \vee, \vee, \vee)$$
H	1	1	1	1	1	$$(1 - \vee, \dots)$$
S	1	1	0	0	0	
O	1	1	0	1	0	
P	1	1	0	0	1	
ŠO	1	1	$$(\frac{1}{2})$$	1	$$(\frac{1}{2})$$	

“ Všechny zmíněné byly tzv. **jednopaměťové strategie**, tzn. akce vychází pouze z předchozího kola

“ V Axelrodově turnaji byly i strategie s delší pamětí, ale nebyly moc dobré

V této parametrizaci v evolučním vývoji nastalo



“ Je to svým způsobem analogie pravděpodobnostního rozšíření, kdy strategie definujeme jako pětice parametrů

Jak dopadne  $$(p_0, \dots, p_4)$$  proti  $$(q_0, \dots, q_4)$$ ?

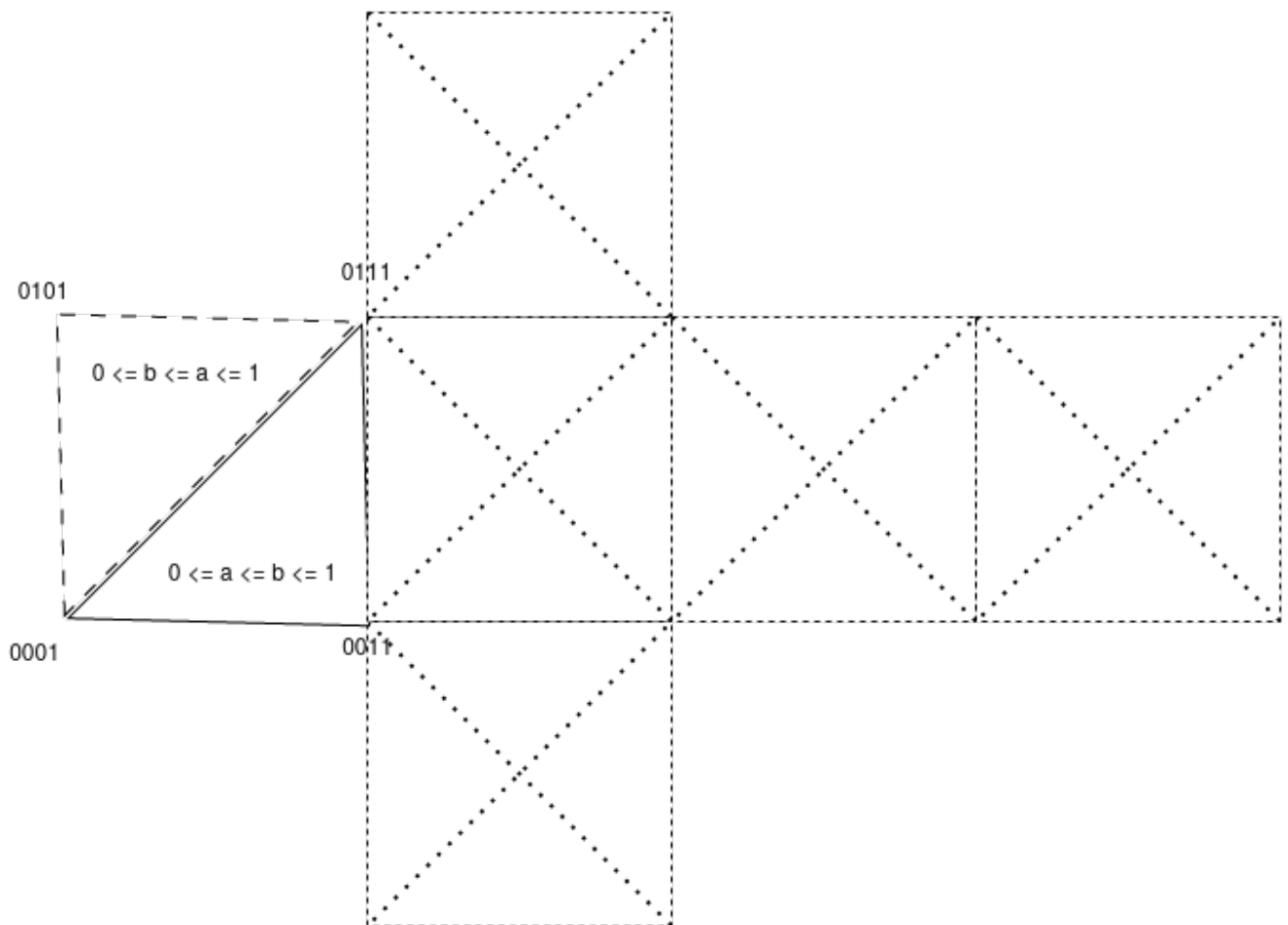
# 5. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\nmtr#1{\begin{matrix} #1 \end{matrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}}
\xdef\mc#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}}
\xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi}
\xdef\Tagged#1{\text{#1}} \xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-
#1}{\text{#1}}} \xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}}
\xdef\conv#1{\mathrm{conv}\, , #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\, , #1}
\xdef\aff#1{\mathrm{aff}\, , #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\, , #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\, ,
#1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\, , #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\, , #1}
\xdef\interior#1{\mathrm{int}\, , #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\, , #1}
\xdef\grad#1{\mathrm{grad}\, , #1} \xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1}
\xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1} \xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x
#1} \xdef\jacobx#1{D_x #1} \xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1}
\xdef\co#1{\mathrm{co}\, , #1} \xdef\iter#1{^{[#1]}} \xdef\str{^*} \xdef\spv{\mc V}
\xdef\civ{\mc U} \xdef\other#1{\hat{#1}} $$
```

## Klasifikace 2x2 her

Předpokládejme, že máme hru  $\text{\mtr{ 0 \& a \& b \& 1 }}$ , kde  $0 \leq a \leq b \leq 1$ , což v extrémech odpovídá

0	$a$	$b$	1
0	1	1	1
0	0	0	1
0	0	1	1



“ Tady změna krychle odpovídá změně jedné nerovnosti

## Opakované hry

Mějme strategii v 1-paměťovém prostředí  $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)$ , kde

- $p_0$  - pravděpodobnost *spolupráce*  $SS$  na začátku (v 1. kole)
- $p_1$  - pravděpodobnost *spolupráce*  $SS$  po  $SS$
- $p_2$  - pravděpodobnost *spolupráce*  $SS$  po  $SZ$
- $p_3$  - pravděpodobnost *spolupráce*  $SS$  po  $ZS$
- $p_4$  - pravděpodobnost *spolupráce*  $SS$  po  $ZZ$

“  $1 - p_i$  je pravděpodobnost *zrady*  $Z$  po  $\dots$

A necht' soupeř má strategii  $(q_0, q_1, q_2, q_3, q_4)$ , přičemž si uvědomme, že  $ZS$  pro nás je  $SZ$  pro něj apod.

Napišme si výherní matici do řádku do **výherního vektoru**  $w = \underline{(w_1, w_2, w_3, w_4)}_{\{(SS, SZ, ZS, ZZ)\}}$

A pak výhru v  $n$ -tém kolem dostaneme jako  $(u(p,q))_n = w \cdot \text{tr}\{P_1 \dots P_n\}$ , kde  $P_i$  je pravděpodobnost, že hra dospěla do stavu  $SS, SZ, ZS, ZZ$

Vektor  $\text{tr}\{P_1 \dots P_n\}$  určíme pomocí teorie markovských řetězců. Spočítejme si přechodovou matici  $A$  - ta bude mít tvar  $A = \begin{matrix} & SS & SZ & ZS & ZZ \\ \begin{matrix} SS \\ SZ \\ ZS \\ ZZ \end{matrix} & \begin{matrix} p_1 q_1 & p_1 q_2 & p_1 q_3 & p_1 q_4 \\ p_2 q_1 & p_2 q_2 & p_2 q_3 & p_2 q_4 \\ p_3 q_1 & p_3 q_2 & p_3 q_3 & p_3 q_4 \\ p_4 q_1 & p_4 q_2 & p_4 q_3 & p_4 q_4 \end{matrix} & \begin{matrix} (1-p_1)q_1 & (1-p_1)q_2 & (1-p_1)q_3 & (1-p_1)q_4 \\ (1-p_2)q_1 & (1-p_2)q_2 & (1-p_2)q_3 & (1-p_2)q_4 \\ (1-p_3)q_1 & (1-p_3)q_2 & (1-p_3)q_3 & (1-p_3)q_4 \\ (1-p_4)q_1 & (1-p_4)q_2 & (1-p_4)q_3 & (1-p_4)q_4 \end{matrix} \end{matrix}$

A pak jistě platí  $P = A^n \text{tr}\{p_0 q_0 \dots\}$

Za předpokladu stability se neprojeví počáteční vektor  $\text{tr}\{p_0 q_0 \dots\}$ , ale hra dospěje do vektoru  $\text{tr}\{v x\}$  takového, že  $A \text{tr}\{v x\} = \text{tr}\{v x\}$

Matice  $A$  musí být **pravděpodobnostní**, tj. suma v každém sloupci musí být 1.

Tento problém řešíme jako  $A \text{tr}\{v x\} = \text{tr}\{v x\} \Rightarrow (A - I) \text{tr}\{v x\} = 0$ , kde  $\text{tr}\{v x\}$  říkáme **stacionární vektor** (z linearity dostaneme, že řešení musí být jediné až na násobek), který také musí být *pravděpodobnostní*, tj.  $\sum v x = 1$ .

Rozepišme si  $A - I = \begin{matrix} & SS & SZ & ZS & ZZ \\ \begin{matrix} SS \\ SZ \\ ZS \\ ZZ \end{matrix} & \begin{matrix} p_1 q_1 - 1 & p_1 q_2 & p_1 q_3 & p_1 q_4 \\ p_2 q_1 & p_2 q_2 - 1 & p_2 q_3 & p_2 q_4 \\ p_3 q_1 & p_3 q_2 & p_3 q_3 - 1 & p_3 q_4 \\ p_4 q_1 & p_4 q_2 & p_4 q_3 & p_4 q_4 - 1 \end{matrix} \end{matrix}$ , což řešíme pomocí **Cramerova pravidla**

$$\left( \begin{array}{cccc|c} & SS & SZ & ZS & ZZ & \\ \hline A - E & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$B$

a tedy  $x_1 = \frac{|B_1|}{|B|}$

kde  $B_1$  je matice, kde jsme 1. sloupec vyměnili za sloupec pravých stran

V tuto chvíli, pokud budeme pouze sčítat řádky, tak se nám nemění determinant. Tedy přičteme 1. řádek z  $B$  k tomu 2. a 3., tj.

$$|B| = \begin{vmatrix} p_1 q_1 - 1 & p_2 q_3 & p_3 q_2 & p_4 q_4 \\ p_1 - 1 & p_2 - 1 & p_3 & p_4 \\ q_1 - 1 & q_3 & q_2 - 1 & q_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

A provedme Laplaceův rozvoj podle 1. řádků pro  $B_1$

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 0 & p_2 q_3 & p_3 q_2 & p_4 q_4 \\ 0 & p_2 - 1 & p_3 & p_4 \\ 0 & q_3 & q_2 - 1 & q_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} p_2 q_3 & p_3 q_2 & p_4 q_4 \\ p_2 - 1 & p_3 & p_4 \\ q_3 & q_2 - 1 & q_4 \end{vmatrix}$$

Obdobně bychom postupovali i pro  $B_2$

$$|B_2| = \begin{vmatrix} p_1 q_1 - 1 & p_3 q_2 & p_4 q_4 \\ ; & ; & ; \end{vmatrix}$$

Celkem naše výhra  $u = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots$   $u = w_1 \frac{|B_1|}{|B|} + w_2 \frac{|B_2|}{|B|} + \dots$   $u = \frac{w_1 |B_1| + w_2 |B_2| + \dots}{|B|}$ , přičemž jmenovatel můžeme vnímat jako Laplaceův rozvoj pro  $B$ , kde místo vektoru  $1$  jsme dali vektor  $w$ , tj.

$$|C| = \begin{vmatrix} p_1 q_1 - 1 & p_2 q_3 & p_3 q_2 & p_4 q_4 \\ p_1 - 1 & p_2 - 1 & p_3 & p_4 \\ q_1 - 1 & q_3 & q_2 - 1 & q_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}$$

Celkem výhru dostaneme jako  $u = \frac{|C|}{|B|}$

Uvědomme si, že každá proměnná je lineární v každém z determinantů (vyskytuje se vždy pouze v jednom sloupci), tj.  $u = \frac{\alpha p_i + \beta}{\gamma p_i + \delta}$

Počítejme optimální vektor  $(p_1, \dots, p_4)$ , tedy  $\frac{\partial u}{\partial p_i} = \frac{\alpha(\gamma p_i + \delta) - (\alpha p_i + \beta) \gamma}{(\gamma p_i + \delta)^2}$   $\frac{\partial u}{\partial p_i} = \frac{\alpha \delta - \beta \gamma}{(\gamma p_i + \delta)^2} > 0$

Tedy to znamená, že řešíme znaménko pouze u  $\alpha \delta - \beta \gamma$

Tedy se výhra řídí ryze rostoucí, či ryze klesající, funkcí v každém parametru

Celkem nejlepší protihra (odpověď) se realizuje nějakou "rohovou" strategií, tj. volbou  $p_i \in \{0, 1\}$  (nebo s šumem  $\{v, 1 - v\}$ )

Případě, že nám vyjde parciální derivace nulová, tak dostaneme "nerohové strategie", což odpovídá celé jedné stěně hyperkrychle  $[0, 1]^4$ .

Spočítejme si nyní onu parciální derivaci "pořádně":

$\frac{\partial}{\partial p_1}$

$$\frac{\partial |B|}{\partial p_1} = \begin{vmatrix} q_1 & p_2 q_3 & \cdot & \cdot \\ 1 & p_2 - 1 & \cdot & 1 \\ 0 & q_3 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial |C|}{\partial p_1} = \begin{vmatrix} \text{---} & // & \text{---} \\ 0 & w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Z tohoto dostáváme podle **Sarrusovy-Jacobiho formule**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & \boxed{A} & e \\ f & g & h \end{vmatrix} \cdot |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ d & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & e \\ g & h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & c \\ A & e \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & A \\ f & g \end{vmatrix}$$

ve smyslu jejího značení  $|A| = \begin{vmatrix} p_2 q_3 & \dots & p_2 - 1 & \dots & q_3 & \dots \end{vmatrix}$



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ p_1 q_1 - 1 & & & q_1 \\ p_1 - 1 & A & & 1 \\ q_1 - 1 & & & 0 \\ w_1 & w_2 & & 0 \end{vmatrix}$$

“ V této formě to na zkoušce **nebude**

## Speciální strategie v IPD

- **ekvalizátor** - soupeř si volí  $q$  tak, aby  $u$  byla konstantní
  - realizuje se lineární závislostí  $\begin{pmatrix} q_1 & q_3 & q_2 - 1 & q_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  a  $\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix}$
  - některé determinanty jsou zde nulové
- **0-determinant (ZD-strategie)**
  - rozdíl mezi  $u$  a  $v$  je prohození  $w_2$  a  $w_4$  (je to symetrická hra)
  - $v$  se liší od  $u$  vektorem výher  $\bar{w} = \begin{pmatrix} w_1 & w_3 & w_2 & w_4 \end{pmatrix}$
  - $u = \frac{\|w\|}{\|1\|}, \quad v = \frac{\|\bar{w}\|}{\|1\|}$  a  $\begin{vmatrix} q_1 & \dots & q_4 & 1 & \dots & 4 \\ w_1 & \dots & w_4 & w_1 & \dots & w_4 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} q_1 & \dots & q_4 & 1 & \dots & 4 \\ w_1 & \dots & w_4 & w_4 & \dots & w_1 \end{vmatrix}$
  - jsou tzv. **vyděračské strategie**

# 6. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}}
\xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1}
\xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{#1}} \xdef\str{\wedge^*} \xdef\spv{\mc{V}} \xdef\civ{\mc{U}}
\xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv{x}} \xdef\yy{\vv{y}} $$
```

## Pokračování

Počítali jsme stacionární vektor  $\mathbf{v}$  pro přechodovou matici  $A$ , tj.  $A \mathbf{v} = \mathbf{v}$

Mějme počáteční pravděpodobnostní vektor  $\mathbf{x}_0$   $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} p_0 q_0 \\ p_0(1 - q_0) \\ (1 - p_0) q_0 \\ (1 - p_0)(1 - q_0) \end{pmatrix}$   $A$  jistě  $\mathbf{x}_1 = A \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 = A \mathbf{x}_1 = A^2 \mathbf{x}_0$

Navíc  $w(\mathbf{x}_0 + \delta A \mathbf{x}_0 + \delta^2 A^2 \mathbf{x}_0 + \dots) = w(E + \delta A + \delta^2 A^2 + \dots) \mathbf{x}_0 = w \underbrace{(\overbrace{E - \delta A}^B)^{-1}}_{\mathbf{y}}$ , což je tedy  $\mathbf{y} = B^{-1} \mathbf{x}_0 \setminus B \mathbf{y} = \mathbf{x}_0 \setminus \mathbf{y} = \frac{|\cdot|}{|\cdot|}$

A tím pádem dostaneme opět lineární závislost výhry na parametru  $p_i$ .

## Evoluční algoritmy

	A	B
A	1	2
B	0	1,5

A počítejme  $\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{5}{3}$   $\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1,5 = 1$

		3
		2
↓		3/4

## Úloha o dohodě

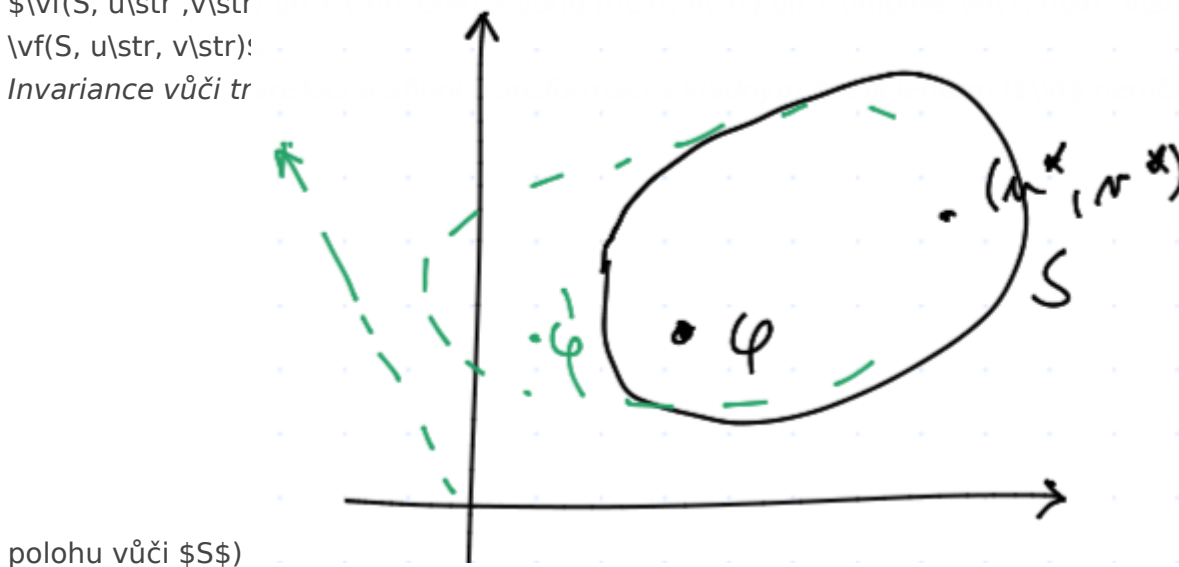
Nechť  $\mathcal{D}$  je množina všech úloh o dohodě (pouze hry 2 hráčů) s funkcí  $v_f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Dále necht' *úloha*  $(S, u, v)$ , kde  $S$  je **konvexní a kompaktní podmnožina** v  $\mathbb{R}^2$  a  $(u, v) \in S$  je výchozí dvojice výher, která je dána tím, co si hráči zaručí - přičemž hledá optimální situaci

“  $S$  je podmnožina, na které se mohou hráči "hýbat" ”

Požadavky na  $v_f$

1.  $\forall (S, u, v) \geq (u, v)$  (bavíme se pouze o výhrách - tzn. cca Paretovská optimalita)
2.  $\forall (S, u, v, u) \in S$
3.  $(u, v) \in S \wedge (u, v) \geq \forall (S, u, v) \implies (u, v) = \forall (S, u, v)$
4.  $\forall (S, u, v) \implies \forall (S, u, v)$
5. Invariance vůči  $tr$



6.  $S$  je symetrická vůči ose  $x = y$  a  $u = v \implies \forall (S, u, v)$  leží na  $x = y$
7.  $(u, v) \in T \subseteq S \implies \forall (T, u, v) \leq \forall (S, u, v)$

Lze ukázat, že taková funkce  $\forall$  splňující 1.-7. **neexistuje**

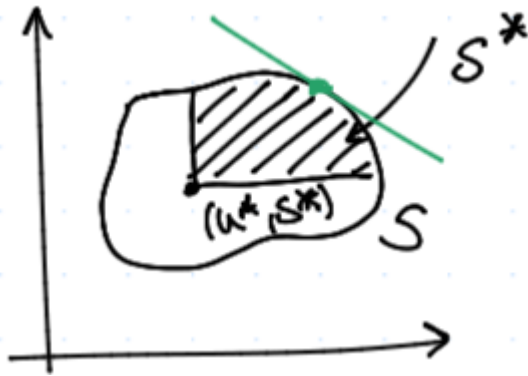
“ Podmínka 7. je velmi silná a pokazí nám to

## Věta $\{D\{NASH\}$

Existuje právě jedno  $\forall$  splňující 1.-6..

## Lemma $\{D\{L1\}$

Nechť  $(\exists u, v \in S) \wedge u > u, v > v$ , pak existuje jediné maximum funkce  $g(u, v) = (u - u)(v - v)$  na množině  $S_+ = \{(u, v) \in S \mid u \geq u, v \geq v\}$ .



## Důkaz

Jistě  $g$  je spojitá,  $S_+$  je kompaktní. Lze předpokládat, že  $(u^*, v^*) = (0,0)$  (posunutím do počátku). Mějme  $(u', v')$ ,  $(u'', v'')$  maxima  $g$ .

Můžeme předpokládat, že  $u' > u''$  a jistě i  $v' < v''$ . Potom  $g\left(\frac{u' + u''}{2}, \frac{v' + v''}{2}\right) = \frac{(u' + u'')(v' + v'')}{4} = \frac{u'v' + u''v' + u'v'' + u''v''}{4} > g(u', v') = u'v' = u''v''$  Nerovnost odpovídá  $u'v'' + u''v' > u'v' + u''v'' \iff (u' - u'')(v'' - v') > 0$ , což ale jistě platí. Tedy jsme našli nové maximum, což je spor.  $\blacksquare$

## Lemma $D\{L2\}$

Za předpokladů  $\text{tagDe}\{L1\}$  nechť  $h(u,v) = (\bar{v} - v)u + (\bar{u} - u)v$ , kde  $(\bar{u}, \bar{v})$  je bod, ve kterém se realizuje maximum  $g$  z  $\text{tagDe}\{L1\}$ . Pak pro libovolné  $(u,v) \in S$  platí  $h(u,v) \leq h(\bar{u}, \bar{v})$ .

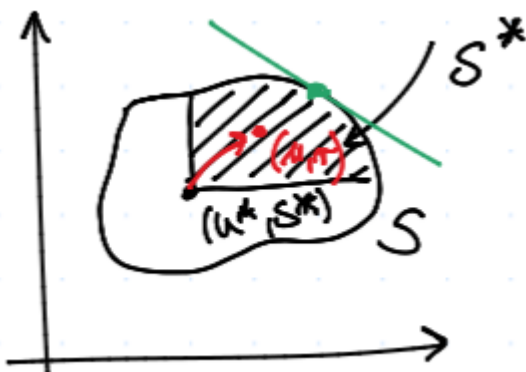
## Důkaz

Sporem, nechť  $h(u,v) > h(\bar{u}, \bar{v})$  pro nějaké  $(u,v) \in S$ . Nechť  $\epsilon \in (0,1)$  a  $(u', v') = (\bar{u}, \bar{v}) + \epsilon((u,v) - (\bar{u}, \bar{v}))$ . Pak ale  $h(u - \bar{u}, v - \bar{v}) = h(u,v) - h(\bar{u}, \bar{v}) > 0$ . Nyní dosadíme  $g(u', v') = (\bar{u} - \epsilon(u - \bar{u}))(\bar{v} - \epsilon(v - \bar{v})) - \epsilon(u - \bar{u})(\bar{v} - \bar{v}) + \epsilon(\bar{u} - u)(\bar{v} - v) = \epsilon^2(u - \bar{u})(v - \bar{v})$ . A derivací podle  $\epsilon$   $0 < \alpha + \beta \epsilon + \gamma \epsilon^2 \rightarrow \beta + 2\gamma \epsilon$ , tedy s růstem  $\epsilon$  roste derivace na vhodném  $(0, \epsilon_0)$ . Tedy  $g$  je rostoucí, což je spor s  $\text{tagDe}\{L1\}$ .

## Důkaz $\text{tagDe}\{NASH\}$

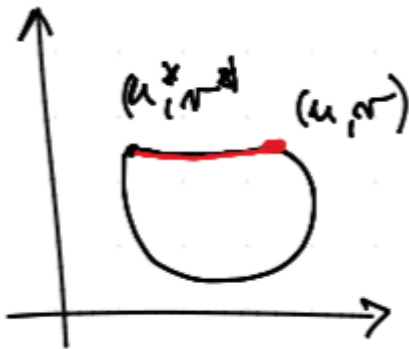
Nastane právě jedna z možností

1. existuje  $(u,v) \in S$  takové, že  $u > u^*, v > v^*$



Potom vezmeme  $(\bar{u}, \bar{v})$  z  $\text{tagDe}\{L1\}$ .

2. Neplatí 1., ale existuje  $(u, v) \in S$  takové, že  $u > u^*$  (a  $v = v^*$ )



V tomto případě vezmeme  $\bar{v} = v^*$  a s  $\bar{u}$  jdeme na maximum  $(u \in S)$

3. Neplatí 1., ale existuje  $(u, v) \in S$  takové, že  $v > v^*$  (a  $u = u^*$ )

$\text{\hspace{3cm}}ANALOGICKY$

4. Neplatí nic, z 1. - 3., tzn.  $\bar{u} = u^*$  a  $\bar{v} = v^*$ .  $\blacksquare$

## Příklad

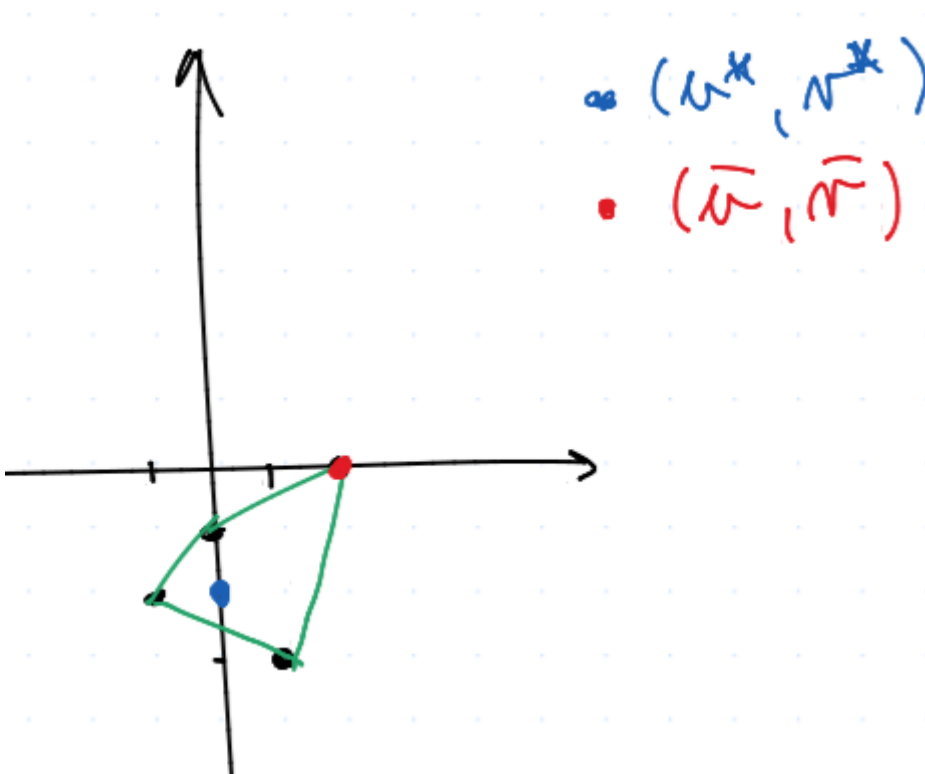
Mějme bimaticovou hru

- student  

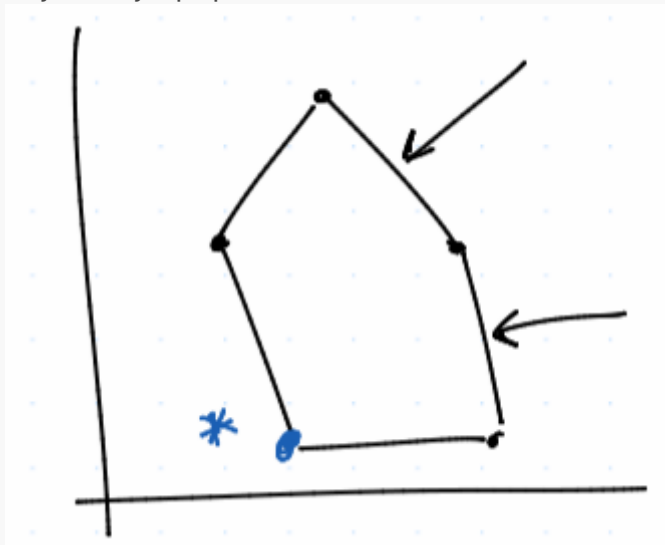
$$A = \begin{matrix} \text{učí} & \text{neučí} \\ \hline \text{dá} & \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \\ \text{nedá} & \end{matrix}$$
- učitel  

$$B = \begin{matrix} 0 & -2 \\ -3 & -1 \end{matrix}$$

U bimaticových her je  $S$  konvexní obal všech situací a bodů z dolních hodnot



Zajímavější případ



# 7. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{(\text{#1})}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}}
\xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1}
\xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{[#1]}} \xdef\str{\wedge^*} \xdef\spv{\mc{V}} \xdef\civ{\mc{U}}
\xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv{x}} \xdef\yy{\vv{y}} $$
```

## Teorie užitečnosti

Nechť  $\mathcal{U}$  je množina událostí, která je seřazená podle toho, jak jsou pro nás užitečné.

Množinu  $\mathcal{U}$  rozšíříme o konvexní kombinace  $r_1 A_1 + \dots + r_n A_n$ , kde  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$  a  $r_1, \dots, r_n \geq 0$  s  $r_1 + \dots + r_n = 1$ .

Relace  $A \preceq B$  znamená, že  $B$  upřednostňuji před  $A$ .  $A \parallel B$  znamená, že žádnou událost neupřednostňuji.

### Axiomy teorie užitečnosti $\mathcal{D}\{\text{AXT}\}$

- $\forall A, B$  nastane právě jedna možnost  $A \succ B, A \preceq B, A \parallel B$
- $\mathcal{T}\{U_2\}$ :  $\parallel$  je relace ekvivalence
- $\mathcal{T}\{U_3\}$ : je tranzitivní
- $\mathcal{T}\{U_4\}$ :  $A \preceq B \parallel C \implies A \preceq C$  a  $A \parallel B \preceq C \implies A \preceq C$
- $\mathcal{T}\{U_5\}$ :  $1 \cdot A + 0 \cdot B = A$



- $(T6)$ :  $r_1 A_1 + \dots + r_n A_n = r_{\sigma_1} A_{\sigma_1} + \dots + r_{\sigma_n} A_{\sigma_n}$  pro libovolnou permutaci  $\sigma \in S(n)$
- $(T7)$ :  $rA + (1-r)(sB + (1-s)C) = rA + (1-r)sB + (1-r)(1-s)C$
- $(T8)$ :  $rA + (1-r)A = A$
- $(T9)$ :  $A \parallel C$  a vezmeme  $r \in [0,1]$ ,  $B \in \mathcal{U} \implies rA + (1-r)B \parallel rC + (1-r)B$
- $(T10)$ :  $A \prec C$ ,  $r > 0$ ,  $B \in \mathcal{U} \implies rA + (1-r)B \prec rC + (1-r)B$
- $(T11)$ :  $A \prec B \prec C \implies \exists r \in [0,1] : rA + (1-r)C \parallel B$

## Věta $(DTEU)$

Existuje  $u : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  tak, že pro  $\forall A, B \in \mathcal{U}$ ,  $r \in [0,1]$ :  $u(A) < u(B) \iff A \prec B$  a navíc platí

- $u(rA + (1-r)B) = ru(A) + (1-r)u(B)$
- je-li  $v$  jiná taková funkce, pak platí  $\forall A \in \mathcal{U} : v(A) = \alpha u(A) + \beta$ , kde  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$

## Lemma $(DTUL)$

Pokud  $B \prec A$  a máme  $0 \leq s \leq r \leq 1$ , pak

1.  $sA + (1-s)B \preceq rA + (1-r)B$
2.  $B \prec C \prec A$ ,  $r \in (0,1) : rA + (1-r)B \parallel C$ , pak  $r$  je určeno jednoznačně

## Důkaz $(\tag{DTUL})$

1.  $sA + (1-s) \left( \frac{r-s}{1-s} A + \frac{1-r}{1-s} B \right) = \frac{r-s}{1-s} A + (1-r) B = \frac{r-s}{1-s} rA + \frac{1-r}{1-s} B \preceq \frac{r-s}{1-s} A + \frac{1-r}{1-s} B$  a podle  $(T8)$  platí  $B = \frac{r-s}{1-s} B + \frac{1-r}{1-s} B \preceq \frac{r-s}{1-s} A + \frac{1-r}{1-s} B$  a celkem podle  $(T10)$  dostáváme  $rA + (1-r)B \preceq sA + (1-s)B$
2. Mějme  $r, s$  a  $rA + (1-r)B \parallel sA + (1-s)B$ , což je spor s  $(DTUL)/1$  a navíc
  - $r = 0 \implies B \parallel C$  spor
  - $r = 1 \implies A \parallel C$  spor

## Důkaz $(\tag{TEU})$

Vezměme události  $E, F \in \mathcal{U}$ ,  $E \prec F$ . Uvážíme  $A \in \mathcal{U}$ , pak nastane některá z možností

- $F \prec A$
- $F \parallel A$
- $E \prec A \prec F$

- $E \parallel A$
- $A \prec E$

“ Kdyby takové  $E, F$  neexistovalo, pak  $E \parallel F$  a pro libovolná  $E, F$  a mohli bychom volit  $u \equiv 0$

Klademe respektive podle možností výše  $u(A) = \frac{1}{r}, 1, s, 0, \frac{t-1}{t}$ , kde

- $(1-s)E + sF \parallel A$
- $rA + (1-r)E \parallel F$
- $tA + (1-t)F \parallel E$

Nyní zvolíme  $B \in \mathcal{U}$  a vyšetříme 25 možností pozice  $A, B$  vůči  $E, F$ , např.  $E \prec A, B \prec F$

Pak  $(1-s_1)E + s_1F \parallel A \parallel (1-s_2)E + s_2F \parallel B$  a tedy  $u(A) = s_1$  a  $u(B) = s_2$ . Předpokládejme  $s_1 = s_2$ , pak podle vztahu výše a  $\tag{U2}$ , tj.  $A \parallel B$ . Nyní předp.  $s_1 < s_2$ , pak z  $\tag{TUL}$  dostáváme  $A \prec B$ . Naopak z  $s_1 > s_2$  plyne  $A \succ B$ .

## Hry ve tvaru charakteristické funkce

“ Hráči jsou poslanci a mají vytvořit vládní koalici - Snaha hráče je vždy dostat se koalice, která má šanci vyhrát

Mějme výherní funkci  $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $N = \{1, \dots, n\}$  je množina všech hráčů a  $2^N$  je **množina všech koalic** ( $\mathcal{P}(N)$ ) a tedy pro  $S \subseteqq N, v(S) \in \mathbb{R}$

Požadujeme

1.  $v(\emptyset) = 0$  **personálnost**
2.  $S, T \subseteqq N, S \cup T = \emptyset \implies v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$  **superaditivita**
3. **Rozdělení**  $x \in \mathbb{R}^N$ 
  1.  $x_1 + \dots + x_n = v(N)$
  2.  $x_i \geq v(\{i\})$

Množinu všech rozdělení hry  $v$  označme  $E(v)$
4. **Podstata**  $\sum_{i \in N} v(\{i\}) < v(N)$

## 5. Značme

$x \preceq_S y$ , což čteme jako: rozdělení  $x$  je dominované rozdělením  $y$  pro koalici  $S$

$$1. \quad (\forall i \in S): x_i < y_i \quad \text{and} \quad \sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$$

Navíc píšeme  $x \preceq y$ , pokud existuje koalice  $S$  tak, že  $x \preceq_S y$

## 6. **jádro** - Množina všech nedominovaných rozdělení, značíme $C(v)$ .

Lze ukázat, že jádro je složeno z rozdělení, kde každá koalice dostane alespoň tolik, kolik si sama zaručí, tj.  $x \in C(v) \iff (\forall S \subseteq N): \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$

## Příklad

Mějme  $N = \{1, 2, \dots, 2k = n\}$ , přičemž lichý hráč má levou botu a pravý hráč má pravou botu - výhra  $v(S)$  koalice  $S$  je pak počet funkčních párů bot, co jsou schopni dát dohromady

- $v(\{i\}) = 0$
- $v(\{1, 2\}) = 1$
- $v(\{1, 2, 3\}) = 1$
- $v(\{1, 3\}) = 0$

Jelikož  $v(\{2m-1, 2m\}) = 1$ , pak  $v(N) = \sum_{m=1}^k v(\{2m-1, 2m\})$ , tedy jistě pro libovolné  $x$  musí platit  $x_{2m-1} + x_{2m} = 1$

Navíc i pro čtveřice musí platit  $x_1 + x_4 = 1 \wedge x_2 + x_3 = 1$

Celkem tedy mám soustavu  $x_1 + x_2 \wedge x_1 + x_4 = 1 \wedge x_2 + x_3 = 1 \wedge x_3 + x_4 = 1 \implies x_1 = x_3 \wedge x_2 = x_4$

A proto  $x \in C(v) \iff x = (a, 1-a, a, 1-a, \dots)$

# 8. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}}
\xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1}
\xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{[#1]}} \xdef\str{\^*} \xdef\spv{\mc{V}} \xdef\civ{\mc{U}}
\xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv{x}} \xdef\yy{\vv{y}} $$
```

## Pokračování her ve tvaru charakteristické funkce

### Věta $\mathcal{D}\{KER\}$

Pro libovolnou hru  $v$  platí  $C(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall S \subseteq N) \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}$ , kde  $C(v)$  je **jádro**.

### Definice ( $\mathcal{D}\{NM\}$ -řešení)

Označme  $V \subseteq E(v)$  s vlastnostmi

- $x, y \in V \implies x \not\prec y$
- $x \in E(v) \setminus V \implies \exists y \in V : x \prec y$

Pak  $V$  nazveme **NM-řešením**. Pod  $E(v)$  myslíme množinu rozdělení.

Je to jistým způsobem alternativa k jádru

Hru nazveme **symetrickou**, pokud  $v(S)$  je funkcí  $|S|$ .

## Příklad

Mějme 3 hráče, 2 se domluví a 3. hráč jim musí zaplatit korunu každému. Jistě  $v(\emptyset) = 0$  a  $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = -2$  Také  $v(\{1,2\}) = \dots = 2$  a jako poslední  $v(\{1,2,3\}) = 0$

Počítejme pro  $C(v)$ :  $x_1 + x_2 \geq 2 \wedge x_1 + x_3 \geq 2 \wedge x_2 + x_3 \geq 2$  celkem  $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 6 \wedge x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$ , ale  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ , což je spor, tedy je jádro prázdné.

Naopak NM-řešeními jsou  $\{(1, 1, -2), (1, -2, 1), (-2, 1, 1)\}$  Zkontroluje **ne**-dominování mezi situacemi, např.  $(1, 1, -2) \not\prec (1, -2, 1)$

“ Zde při dominování si musí polepšit všichni hráči

Toto můžeme splnit koalicí  $SS$ , ale ta podle pidgeon-hole principle nemůže být 2 ani 3 prvková, stejně přijdeme na to, že si 1 prvková koalice nic nezaručuje, tedy ani ona nebude fungovat. Tedy se tyto strategie nedominují.

Ověřme nyní druhou podmínku  $(x,y,z) \notin V$ , **BÚNO** předpokládejme  $x \leq y \leq z$ , přičemž jistě  $x = 2 - y - z$ . Pak pro

- $y > 1$ , pak ale  $y + z > 2$ , tedy  $x < -2$ , ale potom  $(x,y,z) \notin E(v)$  (stejná situace nastane pro  $y = 1$  a  $z > y$ )
- $y = z = 1 \implies x = -2 \implies (x,y,z) \in V$
- $y < 1, z < 1$ , pak ale  $(x,y,z) \prec (-2, 1, 1)$
- $y < 1, z \geq 1$ , pak tuto situaci dominuje  $(1,1, -2)$

## Shapleyho vektor

Vezměme  $V$  - všechny hry ve tvaru charakteristické funkce ( $n$  hráči) - a chceme funkci  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$

Máme několik požadavků na takovou funkci (na **Shapleyho vektor**)

- $\varphi_i(\pi v) = \varphi_{\pi^{-1}(i)}(v)$ , kde  $\pi$  je hra vzniklá permutací  $\pi$  na množině hráčů
- $\varphi_i(u + v) = \varphi_i(u) + \varphi_i(v)$ , kde platí  $(u + v)(S) = u(S) + v(S)$

3.  $\alpha > 0 : \forall i (\alpha v) = \alpha v_i(v), \tag{T{S3}}$  kde  $(\alpha v)(S) = \alpha v(S)$
4. Pokud  $S \subseteq N$  obsahuje všechny podstatné hráče, pak  $v(S) = \sum_{i \in S} v_i(v)$ , kde  $i$  nazveme **podstatným hráčem**, pokud  $\exists S \subseteq N, i \notin S : v(S, \{i\}) > v(S) + v(\{i\}) \tag{T{S4}}$

$\sum_{i \in N} v_i(v) = v(N)$  Je-li  $i$ -tý hráč **nepodstatný**, pak  $v_i(v) = v(\{i\})$

## Věta D{Shapleyho}

Existuje jediná funkce  $v : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  splňující axiomy  $\tag{S1} - \tag{S4}$  uvedené výše a to  $v_i(v) = \sum_{i \in T \subseteq N} \frac{(|T| - 1)! (n - |T|)!}{n!} \text{Big}(v(T) - v(T - \{i\}))$

## Lemma D{LS1}

Nechť  $w_S$  je hra  $w_S(T) = \begin{cases} 1, & S \subseteq T \setminus \emptyset, \\ \text{jinak}, & \end{cases}$  pak platí  $v_i(w_S) = \begin{cases} \frac{1}{|S|}, & i \in S \setminus \emptyset, \\ 0, & i \notin S \end{cases}$

## Důkaz D{LS1}

Hráč je podstatný  $\iff i \in S$ . Proto  $\implies \sum_{i \in S} v_i(w_S) = 1$  Pripustíme  $v_i(w_S) \neq v_j(w_S), i, j \in S$ . Zvolíme  $\pi = (i, j)$ , což ale dává spor s  $\tag{S1}$ .

## Lemma D{LS2}

Nechť  $v \in V$  a  $\emptyset \neq S \subseteq N$  a definujeme  $c_S = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} v(T)$ , kde  $s = |S|, t = |T|$ . Potom  $v = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} c_S w_S$

## Důkaz D{LS2}

Zvolme koalici  $\emptyset \neq U \subseteq N$  a  $\sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} c_S w_S(U) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} \sum_{\emptyset \neq T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} v(T) w_S(U)$

Jelikož  $w_S(U) = 1 \iff S \subseteq U$ , pak  $= \sum_{\emptyset \neq T \subseteq U} \sum_{S \subseteq U} (-1)^{|S|-|T|} v(T) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq U} \left( \sum_{s=|T|}^{|U|} \binom{|U|-|T|}{s-|T|} (-1)^{s-|T|} \right) v(T) = \underbrace{\left( \sum_{i=0}^{|U|-|T|} \binom{|U|-|T|}{i} (-1)^i \right)}_{(1-1)^{|U|-|T|} = 0 \text{ pro } |T| \leq |U|, 1 \text{ jinak}} v(T) \blacksquare$

“ Lemma D{LS2} dává jednoznačnost z D{Shapleyho} věty.

## Důkaz D{Shapleyho} věty

Počítejme  $\varphi_i(v) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} c_S \varphi_i(w_S) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} c_S \frac{1}{s} = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} \frac{1}{s} \sum_{T \subseteq S} (-1)^{s-t} v(T) = \sum_{T \subseteq N} \sum_{T \subseteq S \subseteq N} \frac{(-1)^{s-t}}{s} v(T) = \sum_{i \in T} \gamma_i(T) (v(T) - v(T \setminus \{i\}))$ , kde  $\gamma_i(T) = \sum_{T \cup \{i\} \subseteq S \subseteq N} \frac{(-1)^{s-t}}{s}$

Počítejme  $\gamma_i(T) = \sum_{s=t}^n \frac{(-1)^{s-t}}{s} \binom{n-t}{s-t} \int_0^1 x^{s-1} dx = \int_0^1 x^{t-1} \underbrace{\left( \sum_{s=t}^n (-1)^{s-t} \binom{n-t}{s-t} x^{s-t} \right)}_{\sum_{j=0}^{n-t} (-1)^j \binom{n-t}{j} x^j = (1-x)^{n-t}} dx = \int_0^1 x^{t-1} (1-x)^{n-t} dx = \text{per partes} = \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}$

“  $\int_0^1 x^{t-1} (1-x)^{n-t} dx = \frac{1}{n} t x^T (1-x)^{n-t} - \int_0^1 \frac{1}{n} t x^t (-1) (1-x)^{n-t-1} dx = \frac{1}{n} t \left( x^T (1-x)^{n-t} + \int_0^1 x^t (1-x)^{n-t-1} dx \right)$

“ Shapleyho vektor se **nemusí** nacházet v jádře

## Pokračování příkladu s NM-řešením

$\varphi_1(v) = \sum_{1 \in T \subseteq N} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} (v(T) - v(T \setminus \{1\})) = \frac{0!2!3!(-2) + 2 \cdot \frac{1!1!3!}{2!} (2 - (-2)) + \frac{2!0!3!}{3!} (0 - 2)}{3!} = \frac{1}{3!} (-4 + 8 - 4) = 0$

# Teorie sociálního výběru

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{(\text{#1})}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}}
\xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1 \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1 \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1
\xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1 \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial}, #1 \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1 \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1 \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1
\xdef\iter#1{\wedge^{[#1]}} \xdef\str{\wedge^*} \xdef\spv{\mc{V}} \xdef\civ{\mc{U}}
\xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv{x}} \xdef\yy{\vv{y}} $$
```

Teorie sociálního výběru - teorie her o volebních systémech

## Příklad

Máme 15 zaměstnanců - ti si chtějí zvolit nového šéfa - a 3 kandidáty  $A, B, C$  Potom preferenční uspořádání jsou

- 7 zaměstnanců:  $A > B > C$
- 7 zaměstnanců:  $B > A > C$
- 1 zaměstnanec:  $C > A > B$

Přehled bodů:

# people	A	B	C
7	2	1	0
7	1	2	0
1	1	0	2



Celkem má \$A\$ 22 bodů, \$21\$ bodů pro \$B\$ a \$2\$ pro \$C\$

Pokud by ale těch 7 zaměstnanců s 1. \$B\$ chtělo uškodit \$A\$, mohou si změnit preference na  $B > C > A$

To stejné mohou udělat i ti s 1. \$A\$. Potom preferenční uspořádání jsou

- 7 zaměstnanců:  $A > C > B$
- 7 zaměstnanců:  $B > C > A$
- 1 zaměstnanec:  $C > A > B$

Přehled bodů:

# people	A	B	C
7	2	0	1
7	0	2	1
1	1	0	2

Celkem má \$A\$ 15 bodů, \$14\$ bodů pro \$B\$ a \$16\$ pro \$C\$

Označme

- \$N\$ voliče
- $\prec_i$ -tíci uspořádání  $\prec_i$  ( $i \in N$ ) nazývanou **preferenční uspořádání** na množině \$A\$
- \$A\$ množinu variant

**Preferenční schéma**  $p : N \rightarrow S_m$ ,  $|A| = m$ , kde  $S_m$  je permutace množiny \$A\$

Dále označme \$P\$ množinu všech preferenčních schémat (pro pevné \$N, A\$).

Náš cíl je najít pevné  $d : P \rightarrow S_m$ , kde  $d$  nazýváme **funkcí sociálního rozhodování**  $d(\prec_i) = \prec_j$  a požadujeme

1.

$$(\forall \prec_i \in P) (\forall a, b \in A) (\forall i \in N) \quad a \prec_i b \implies a < b$$
$$\tag{T\{FSR-1\}}$$

2.

$$(\forall \prec_i \in N, \prec_j \in P) (\forall a, b \in A) \quad \{i \mid a \prec_i b\} = \{i \mid a \prec_j b\} \implies (a < b \text{ iff } a \prec b)$$
$$\tag{T\{FSR-2\}}$$

**Definice**  $D\{Dikt\}$

Dále  $j \in N$  nazveme **diktátorem**, pokud  $d(\prec_i) = \prec_j$

## Věta $\mathcal{D}\{\text{Arrow}\}$

Nechť  $n \geq 2$ ,  $n \geq 3$ . Pak libovolná funkce soc. rozhodování má diktátora.

## Příklad

1.  $m = 2$ ,  $n \geq 2$ , např. většinové pravidlo

$$I \subseteq N \quad (\forall i \in I) \quad a \leq_i b \quad (\forall j \in N \setminus I) \quad b \leq_j a$$

Je-li  $|I| > \frac{n}{2} \implies a < b$  (a opačně). Při  $n$  sudém dáme na "čestného předsedu"

2.  $m = 2$ ,  $n = 2$ , možnosti

$$a \leq_1 b, a \leq_2 b \quad \implies a < b \quad a \leq_1 b, b \leq_2 a \quad \implies a <$$

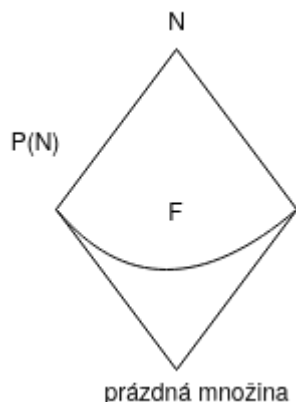
$$b, \overbrace{b < a}^{\text{2. diktátor}}, \overbrace{a < b}^{\text{1. diktátor}}, b <$$

$$a, \underbrace{b < a}_{\text{2. diktátor}}, \underbrace{b < a}_{\text{1. diktátor}}, b < a \quad b \leq_1 a, b \leq_2 a \quad \implies b < a$$

## Definice $\mathcal{D}\{\text{Filtr}\}$

Řekneme, že  $\mathcal{F}$  je filtr na množině  $N$ , pokud

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- $F, G \in \mathcal{F} \implies F \cap G \in \mathcal{F}$
- $F \in \mathcal{F}, F \subseteq G \implies G \in \mathcal{F}$



Dále definujeme **hlavní filtr**  $\mathcal{F} \uparrow_A = \{F \subseteq N \mid a \in F\}$  a **ultrafiltr** - maximální filtr, tj.  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq P(N) \implies \mathcal{G} = \mathcal{F}$

## Lemma $\mathcal{D}\{L1\}$

Filtr  $\mathcal{F}$  na  $N$  je **ultrafiltr**  $\iff \forall F \subseteq N \text{ je } F \in \mathcal{F} \text{ nebo } N \setminus F \in \mathcal{F}$

## Důkaz $\tag{L1}$

Pokud by  $F \notin \mathcal{F}$  a ani  $N \setminus F \notin \mathcal{F}$ , pak generujeme  $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \mathcal{F} \uparrow_F$

Nyní je třeba ukázat, že  $\emptyset \notin \mathcal{G}$ . Kdyby ano, pak by muselo platit  $\emptyset = F \cap G$  pro  $G \in \mathcal{F}$ , pak  $G \subseteq N \setminus F$ , což je spor s  $N \setminus F \notin \mathcal{F}$ .

## Lemma $\mathcal{D}\{L2\}$

Pro libovolnou konečnou množinu  $N$  je každý ultrafiltr hlavní.

Podmnožina  $F \subseteq N$  **přehrává**  $F'$ , typicky  $F' = N \setminus F$ , ve dvojici  $a, b \in A$ , platí-li  $a \leq_F b$ ,  $a \leq_{F'} b \implies a < b$ , kde pod  $a \leq_F b$  myslíme  $(\forall i \in F) \quad a \leq_i b$

## Lemma $\mathcal{D}\{L3\}$

Pokud  $F$  přehrává  $F' = N \setminus F$  pro  $d \in a, b$  a  $x, y$  jsou libovolné  $x, y \in A \implies F$  přehrává  $F'$  i v  $x, y$

“ Tedy pokud umí vynutit  $a < b$  pro nějakou dvojici, umí to pro všechny dvojice

## Důkaz $\text{tagDe}\{L3\}$

Uvažujme  $c \leq_F a \leq_F b$  a také  $b \leq_{F'} c \leq_{F'} a$  (preferenční schéma musí být připravené pro všechny situace).

Pak ale podle  $\text{tagEq}\{FSR-1\}$  musí být  $c < a$ , ale také  $a < b$  podle předpokladů. Celkem máme, že  $c < a < b$ .

Nyní vezměme libovolná  $c \leq_F, \leq_{F'}$  splňující  $c \leq_F b, b \leq_F c$ , pak dostaneme  $c < b$ , protože výsledek  $d$  nezávisí na  $a$  podle  $\text{tagEq}\{FSR-2\}$ . Jinak řečeno  $F$  přehrává  $F'$  i v  $c, b$ .

Duálně nahradíme  $b$  nějakým  $e$  a stejně se dostaneme k  $x, y$

Zde  $F$  nazveme **rozhodující (vládnoucí) rodina** pro  $d$

## Lemma $\mathcal{D}\{L4\}$

Pro  $n \geq 2, m \geq 3$  je množina všech vládnoucích rodin **ultrafiltr** na  $N$

## Důkaz $\text{tagDe}\{L4\}$

Nechť  $F$  je vládnoucí rodina a platí  $F \subseteq G \subseteq N \implies G$  je vládnoucí rodina. Mějme  $a, b, c \in A$  s  $F \subseteq G \subseteq N$  a požadujeme

1.  $a \leq_{N-G} c \leq_{N-G} b$

2.  $a \leq_{G-F} b \leq_{G-F} c$
3.  $b \leq_F a \leq_F c$

Z  $\text{tagEq}\{\text{FSR-1}\}$  víme, že  $a < c$ . Navíc  $G$  přehrává  $G'$  v  $b, c$  a také  $F$  je vládnoucí rodina a 3. víme, že  $b < a < c$ .

Celkem tedy  $G$  přehrává  $G'$  v  $b, c$  a tedy  $G$  je vládnoucí.

Dokažme, že  $F$  je **ultrafiltr** a tedy  $\emptyset \neq F \subseteq N \implies F \neq \emptyset$  (nebo  $F' \neq \emptyset$  je vl. rodina), tj.  $b \leq_{F'} a$ ,  $a \leq_F b$ , pak

- $a < b \implies F$  je vl.
- $b < a \implies F'$  je vl.

Ukažme nyní uzavřenost na průniky. Nechť  $\emptyset \neq F, G \subseteq N$  a  $F, G$  vládnoucí  $\implies F \cap G$  vládnoucí. Vezměme nyní  $b \leq_{N \setminus (F \cup G)} c \leq_{N \setminus (F \cup G)} a \leq_{F \setminus G} a \leq_{F \setminus G} c \leq_{G \setminus F} b \leq_{G \setminus F} a \leq_{F \cap G} c \leq_{F \cap G} b$ ,  $\$$  z čehož dohromady víme z

- $F = (F \cap G) \cup (F \setminus G)$ , že  $a < c$
- $G = (F \cap G) \cup (G \setminus F)$ , že  $c < b$

Celkem  $a < c < b \implies a < b$ , tedy  $F \cap G$  je vládnoucí pro  $a, b$

## Důkaz $\text{tagDe}\{\text{Arrow}\}$

Jelikož  $\text{mcal } F = \uparrow_j \implies \{j\}$  je vládnoucí a tedy  $j$  je **diktátor**.

# Hry v rozšířené formě (poziční hry)

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\lVert #1 \right\rVert}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix}#1\end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{#eq-
#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDe#1{\href{#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-
#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}},
#1} \xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{#1}} \xdef\str{\ast} \xdef\spv{\mc V} \xdef\civ{\mc U}
\xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv x} \xdef\yy{\vv y} $$
```

“ Také lze nazývat *tahové hry*

## Definice $\$D\{HvRF\}\$$

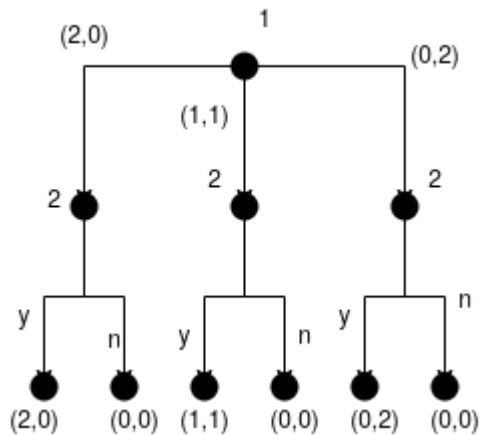
Nechť  $\$N\$$  je množina hráčů,  $\$H\$$  množina **historií**

- prázdná posloupnost  $\$ \ve \in H \$$
- $\$(a^k)_\{k=1\}^K, K \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \$$  je historie  $\$ \implies (a^k)_\{k=1\}^L, L < K \$$  je historie
- máme-li  $\$(a^k)_\{k=1\}^\infty \$$  a víme, že  $\$ \forall L < \infty : (a_k)_\{k=1\}^L \$$  je historie, pak i  $\$(a^k)_\{k=1\}^\infty \$$  je historie

Dále nechť  $\$P\$$  je **tahová funkce**,  $\$P : H' \rightarrow N \$$  (nebo také  $\$P : H' \rightarrow \mathcal{P}(N) \$$ ), kde  $\$H' = H - Z \$$ ,  $\$Z \$$  jsou **terminální historie**, což jsou maximální posloupnosti v  $\$H \$$  (ty, které neumíme dále rozšířit).

Pak výherní funkce má tvar  $u_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$  nebo může být zadáno pouze preferenční uspořádání  $\succsim_i$  na  $Z$

## Příklad



Zde  $N = \{1, 2\}$ ,  $P(\varnothing) = 1$  a  $P((0,2)) = P((1,1)) = P((2,0)) = 2$  a také  $u_1((1,1), y) = 1$ . Množina historí má tvar  $H = \{\varnothing, (2,0), (1,1), (0,2), ((2,0), y), ((2,0), n), \dots\}$

Strategie pro prvního hráče  $X = \{(2,0), (1,1), (0,2)\}$  a pro druhého hráče  $Y = \{(2,0), y, (2,0), n, \dots\}$

Obecně zapsáno strategie pro  $i$ -tého hráče je množina  $X_i = \{f : \bar{H} \rightarrow H \mid \bar{H} = \{\bar{h} \in H \mid P(\bar{h}) = i\}, \bar{h} \text{ je podposloupnost } f(\bar{h}) \text{ bez posledního členu}\}$

### Nashova rovnováha:

Máme výherní funkci  $u_i(\bar{f}_i, f_{-\hat{i}}) \geq u_i(f_i, f_{-\hat{i}})$ , tj.  $i$  volí nejlepší odpověď na  $f_{-\hat{i}}$ . Pak  $(\bar{f}_i)_{i \in N}$  je rovnováha.

Dále definujeme podhru hry  $(N, H, P, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$  jako  $(N, H \mid_h, P \mid_h, (X_i \mid_h)_{i \in N}, (u_i \mid_h)_{i \in N})$ , kde  $h \in H$  pevná historie a  $h' \in H \mid_h$  iff  $(h, h') \in H$ . Dále

- $P \mid_h(h') = P(h, h')$
- $f' \in X_i \mid_h$  iff  $(\exists f \in X_i) (\forall \bar{h} \in \bar{H} \mid_h) \quad (h, f'(\bar{h})) = f(h, \bar{h})$
- $u_i \mid_h(h') = u_i(h, h')$

Situace  $(f_i)_{i \in N}$  je **perfektní podherní rovnováha (PPR)**, je-li takto zvolené  $(f_i \mid_h)_{i \in N}$  (Nashovou) rovnováhou pro každou historii  $h$ .

## Pokračování příkladu

Rovnováha  $\left((1,1), \begin{pmatrix} (2,0) \mapsto ((2,0), n) \\ (1,1) \mapsto ((1,1), y) \\ (0,2) \mapsto ((0,2), n) \end{pmatrix} \right)$ , což ale **není perfektní podherní rovnováha**, neboť se

zde  $(0,2) \mapsto ((0,2), n)$  rozhodl špatně, jinak řečeno  $H \mid_h \sqcup u_2((0,2), n) < u_2((0,2), y)$

Tedy **perfektní podherní rovnováha** je v tomto případě  $\left((1,1), \begin{matrix} (2,0) \\ \mapsto ((2,0), n) \end{matrix} \mid (1,1) \mapsto ((1,1), y) \mid (0,2) \mapsto ((0,2), y) \end{matrix} \right)$ , ale také  $\left((1,1), \begin{matrix} (2,0) \mapsto ((2,0), y) \end{matrix} \mid (1,1) \mapsto ((1,1), y) \mid (0,2) \mapsto ((0,2), y) \end{matrix} \right)$

---

## Lemma $D\{L1\}$

Nechť  $G = (N, H, P, \mathcal{X}, \mathcal{U})$  je hra v rozšířené formě s konečným horizontem (všechny historie jsou konečné). Pak situace  $(f_i)_{i \in N}$  je **PPR**  $\iff \forall i \in N, \forall h \in H, \forall i \in N, P(h) = i \implies u_i((f_i \mid_h)_{i \in N}) \geq u_i(\tilde{f}_i, (f_j \mid_h)_{j \in \hat{i}})$ , kde  $\tilde{f}_i \in H \mid_h$  se liší od  $f_i \mid_h$  pouze akcemi po  $h$

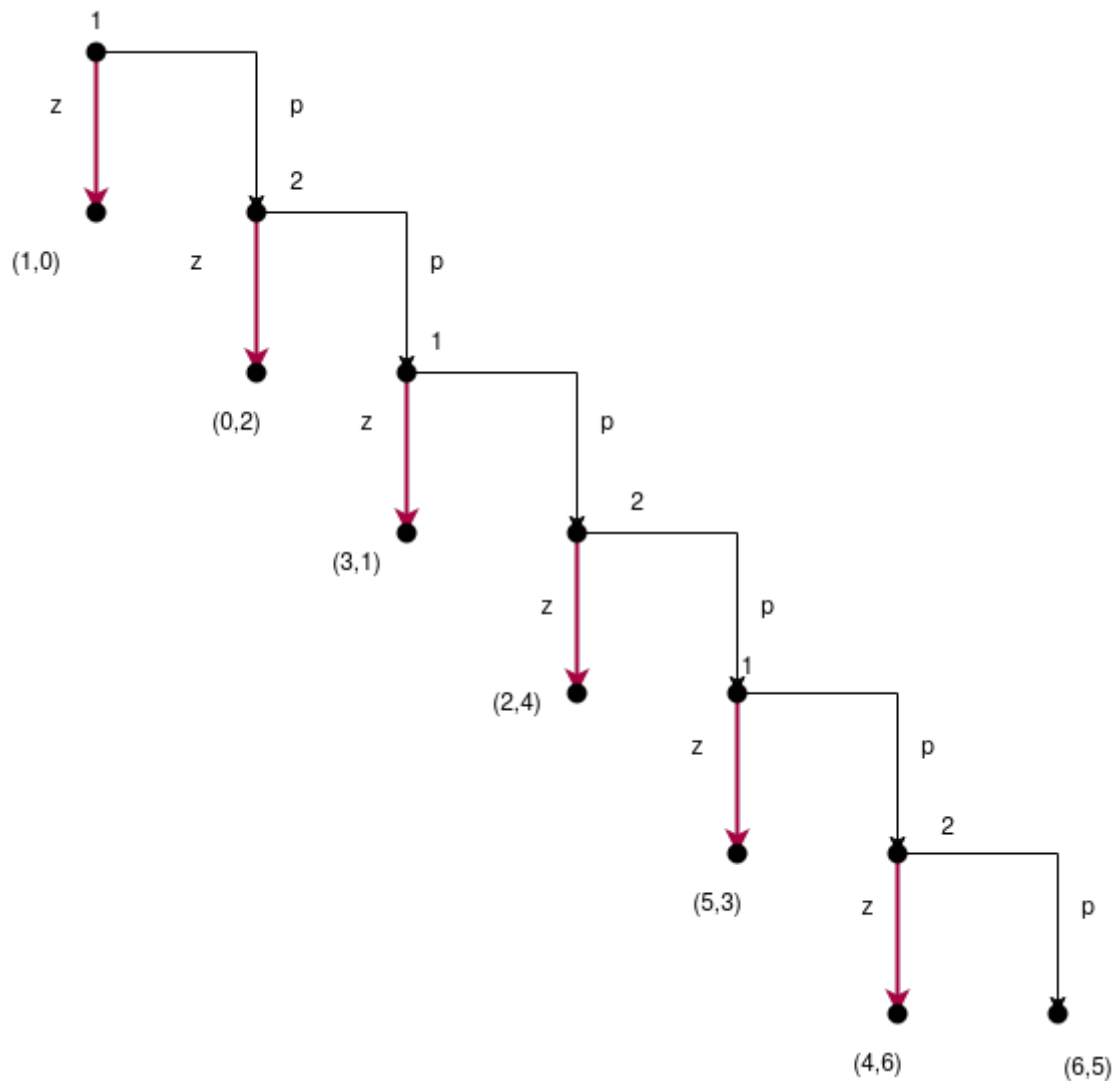
## Věta $D\{V1\}$

Je-li  $G = (N, H, P, \mathcal{X}, \mathcal{U})$  konečná hra v rozšířené formě (tj. má konečný horizont a v každém vrcholu se rozhodujeme z konečně mnoha variant, tj.  $H$  je konečná), pak existuje **PPR\***.

Dále tuto tematiku rozšiřují tzv. folkové věty.

## Příklad: Stonožka

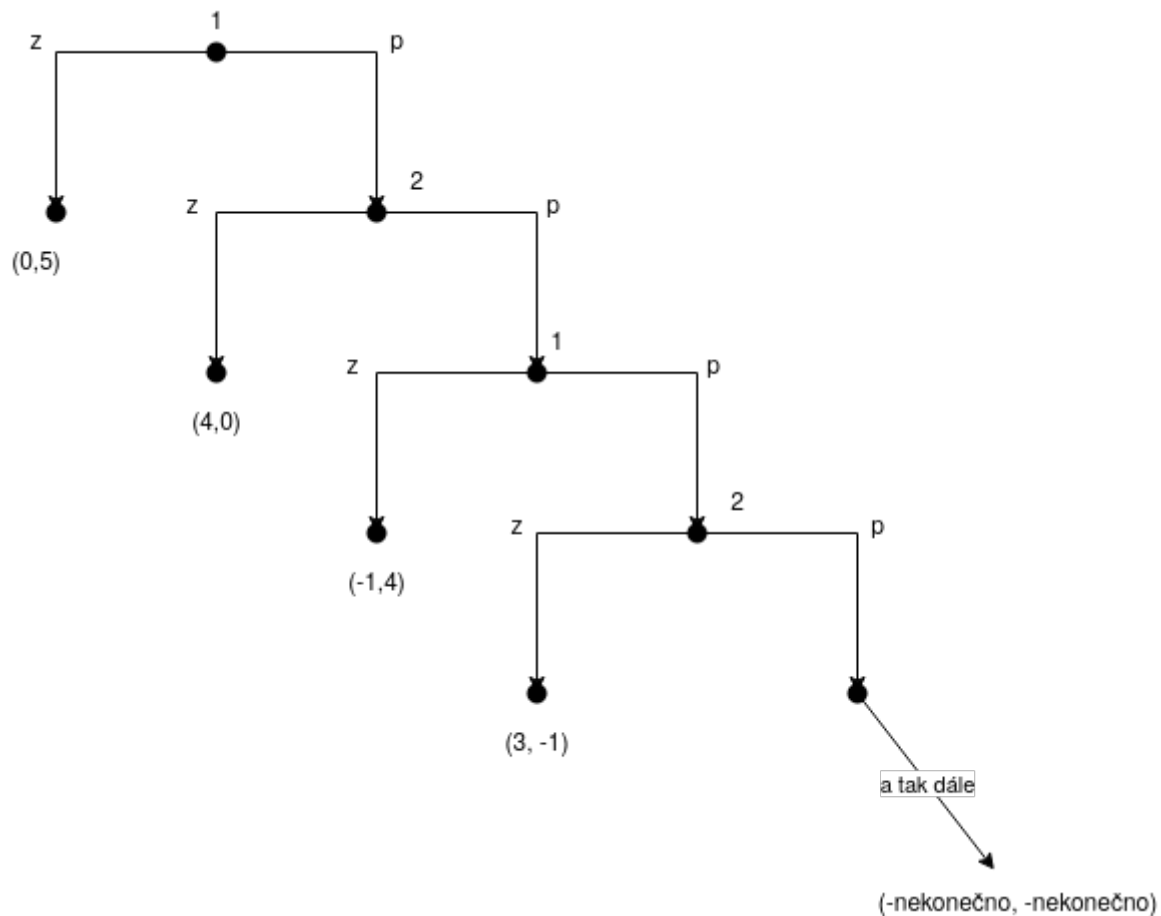
Máme 2 hráče  $N = \{1,2\}$



A  $f_1 = \begin{pmatrix} \vee & \mapsto (z) & \mapsto (p,p) & \mapsto (p,p,z) & \mapsto (p,p,p,p) & \mapsto (p,p,p,p,z) \\ \end{pmatrix}$  a  $f_2 = (\dots)$  analogicky.

Příklad: Dražba s placením





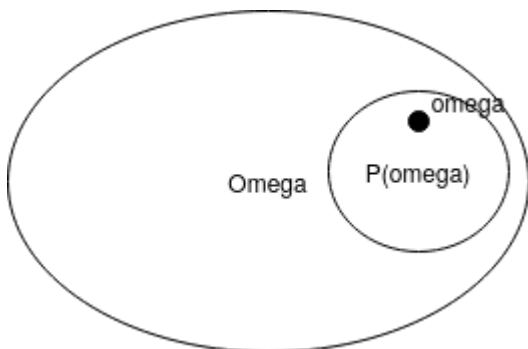
Tedy  $\overbrace{\text{mtr}\{(-\infty, -\infty) \& (4,0) \setminus (0,5) \& (0,5)\}}^{(p, \dots, p), \quad (z, \dots, z)}$ , kde  $(4,0)$  je rovnováha a  $(0,5)$

# Hry s neúplnou informací

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\|Vert #1 \right\|rVert}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&}\xdef\AND{\quad \and \quad}\xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix}#1\end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}}\xdef\vp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1}
\xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{#1}} \xdef\str{\^*} \xdef\spv{\mc{V}} \xdef\civ{\mc{U}}
\xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv{x}} \xdef\yy{\vv{y}} $$
```

## Znalost

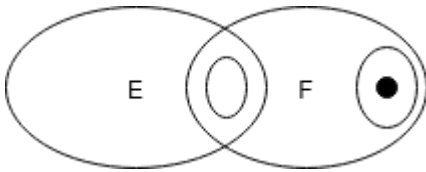
Nechť  $\Omega$  označuje množinu stavů. Mějme *informační funkci*  $P$ , přičemž  $P(\omega) \subseteq \Omega$



a máme 2 axiomy  $\forall \omega \in \Omega \quad \omega \in P(\omega) \tag{T1}$  a  $\omega' \in P(\omega) \implies P(\omega') = P(\omega) \tag{T2}$ , přičemž z  $\tag{T1}, \tag{T2}$  plyne, že  $P$  vytváří rozklad na  $\Omega$ .

Dále definujme  $K$  znalostní funkci a  $E \subseteq \Omega$  událost a platí  $K(E) = \{\omega \in \Omega \mid P(\omega) \subseteq E\}$ , splňující

1.  $K(\Omega) = \Omega \tag{\mathcal{T}\{K_1\}}$
2.  $E \subseteq F \implies K(E) \subseteq K(F) \tag{\mathcal{T}\{K_2\}}$
3.  $K(E) \cap K(F) = K(E \cap F) \tag{\mathcal{T}\{K_3\}}$



4.  $K(E) \subseteq E \tag{\mathcal{T}\{K_4\}}$
5.  $K(K(E)) = K(E) \tag{\mathcal{T}\{K_5\}}$
6. (axiom moudrosti)  
 $\Omega \setminus K(E) = K(\Omega \setminus K(E)) \tag{\mathcal{T}\{K_6\}}$

## Příklad - Hádání barvy klobouku

Pro začátek uvažujme 3 hráče, každý dostane **černý** nebo **bílý** klobouk, přičemž jeho barvu nezná. Hráči ví, že minimálně jeden klobouk je bílý. Hráči kteří odhadnou, jakou barvu má jejich klobouk, zvednou ruku a hraje dokud to všichni neví.

Možné situace

- BČČ  $\implies$  (pokud by 1. nevěděl, že má jediný bílý, nezvedal by ruku) **KONEC**
- BBČ  $\implies$  (bílý si řekne, druhý bílý nezvedl ruku, tedy já musím být taky bílý)  $\implies$  (černý nic neví, ale ostatní to už věděli, takže musí mít černý) **KONEC**
- BBB  $\implies$  (nikdo nic neví, tedy musí mít někdo bílý klobouk) **KONEC**

Jistě  $\Omega = \{c \in \{\text{B}, \text{Č}\}^n \mid \exists i \in N : c(i) = \text{B}\}$  a označme  $P^i_j$  informační funkci  $i$ -tého hráče v  $j$ -tém kole ( $j = 1, 2, \dots$ )

V případě BČČ je  $P^1_1(\text{BČČ}) = \{\text{BČČ}\}$ , ale v  $P^1_1(\text{BBČ}) = \{\text{BBČ}, \text{ČBČ}\}$

Dále označme  $E_i$  jako událost, ve které  $i$ -tý hráč dozvěděl svoji barvu a tedy  $|E_i| = 1$ . Nyní nechť  $F^k = \{c \mid |\{c(i) = \text{B}\}| = k\}$

Potom  $P^2_j(c) = P^1_j(c) - F^1$ . V našem případě  $F^1 = \{\text{BČČ}, \text{ČBČ}, \text{ČČB}\}$ ,  $F^2 = \{\text{BBČ}, \text{BČB}, \text{ČBB}\}$ , proto  $P^1_1(\text{BBČ}) = \{\text{BBČ}, \text{ČBČ}\} \implies P^2_1 = P^1_1(\text{BBČ})$ ,  $\quad P^3_1(\text{BBČ}) = \underbrace{\{\text{ČBČ}\}}_{\in E_1}$

Označme  $K_1, K_2$  - znalostní funkce 1. a 2. hráče. Dále  $E$  je společnou znalostí ve stavu  $\Omega$ , pokud  $K_1(E), K_2(E), K_1(K_2(E)), K_2(K_1(E)), K_2(K_1(K_2(E))), K_1(K_2(K_1(E)))$ ,

$\Omega$  obsahuje  $\omega$ .

Např.  $P_1 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}, \{\omega_6\}\}$ ,  $P_2 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2, \dots, \omega_5\}, \{\omega_6\}\}$ ,  $E = \{\omega_1, \dots, \omega_4\}$ , pak jistě

- $K_1(E) = \{\omega_1, \omega_2\}$
- $K_2(E) = \{\omega_1, \dots, \omega_4\}$
- $K_1(K_2(E)) = \{\omega_1, \omega_2\}$  a  $K_2(K_1(E)) = \{\omega_1\} = K_2(K_1(K_2(E)))$
- $K_1(K_2(K_1(E))) = \emptyset$

Událost  $F \subseteq \Omega$  je samozřejmá mezi 1. a 2. hráčem, jestliže  $\forall \omega \in F : P_i(\omega) \subseteq F$  pro  $i = 1, 2$

$E$  je společnou znalostí v  $\omega$ , pokud existuje  $F$ ,  $\omega \in F$ , samozřejmá pro  $i = 1, 2$ . Např.  $F = \{\omega_1, \dots, \omega_5\}$

V příkladu s klobouky

$P_1^1 = \{\{B\check{C}\check{C}\}, \{BB\check{C}, \check{C}B\check{C}\}, \{B\check{C}B, \check{C}\check{C}B\}, \{BBB, \check{C}BB\}\}$   $P_2^1 = \{\{\check{C}B\check{C}\}, \{BB\check{C}, B\check{C}\check{C}\}, \{\check{C}BB, \check{C}\check{C}B\}, \{BBB, B\check{C}B\}\}$

