

M7190 Teorie her

- [Úvodní informace](#)
- [1. přednáška](#)
- [2. přednáška](#)
- [3. přednáška](#)
- [4. přednáška](#)
- [5. přednáška](#)
- [6. přednáška](#)
- [7. přednáška](#)
- [8. přednáška](#)
- [Teorie sociálního výběru](#)
- [Hry v rozšířené formě \(poziční hry\)](#)
- [Hry s neúplnou informací](#)

Úvodní informace

Ukončení

- **písemná** zkouška
 - zpracování (nějaké) hry
 - 2 hodiny (klidně i déle)
- jsou k dispozici skripta ve studijních materiálech (je **povolená na zkoušku** - pouze tento text)
- maximálně 3 neomluvené absence

Náplň

- hra v normální formě
 - hlavně tohle
 - maticové, případně bimaticové, hry
- opakované hry
 - konečné i nekonečné
- poziční hry
- na závěr semestru *koaliční hry* a funkce sociálního rozhodování (volební systémy)

1. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}}
\xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1}
\xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{[#1]}} \xdef\str{\^*} \xdef\spv{\mc{V}} \xdef\civ{\mc{U}}
\xdef\other#1{\hat{#1}} $$
```

“ V jakémsi smyslu zobecnění optimalizace, kdy máme více hráčů

Úvodní příklad (hra *ultimátum*)

Mějme $I = [0, 1]$ a 1. hráč si vybere $x \in I$ a 2. hráč říká **ano/ne** na vybrané x .

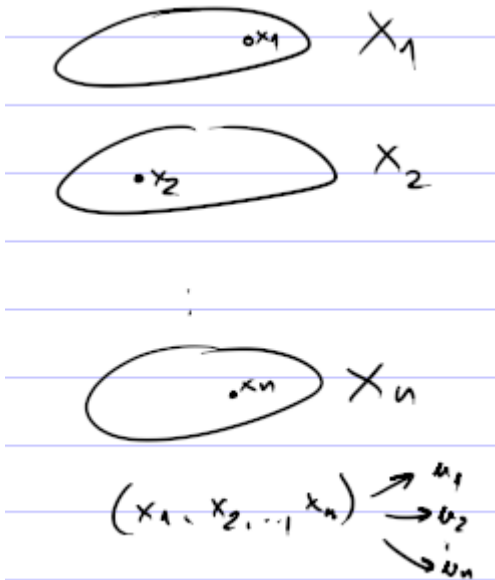
Hry v normální formě

Definice $\mathcal{D}\{\text{HNF}\}$ (Hra v normální formě)

Mějme $n \in \mathbb{N}$ a $N = \{1, 2, \dots, n\}$ je **množina hráčů**. A zavedme

- X_i - množina strategií i -tého hráče
- u_i - výherní funkce i -tého hráče (\prod je zde *kartézský součin*)
 $u_i : \prod_{i \in N} X_i \rightarrow \mathbb{R}$

Navíc předpokládáme, že hráči hrají "rozumně" a "ví všechno" (tj. znají množiny strategií ostatních hráčů i jejich výherní funkce).



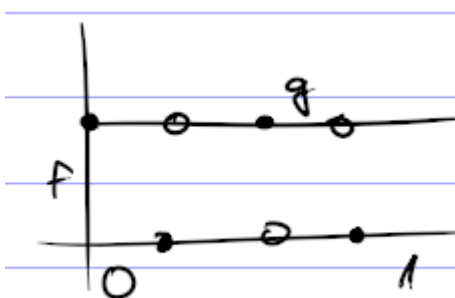
Řekneme, že strategie x_i **dominuje** y_i , značíme $x_i \succ y_i$. Navíc značíme $x_{\setminus i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ a pak $u_i(x_i, x_{\setminus i}) \geq u_i(y_i, x_{\setminus i}) \quad \forall x_{\setminus i} \quad \text{and} \quad \exists x_{\setminus i} \quad u_i(x_i, x_{\setminus i}) > u_i(y_i, x_{\setminus i})$

Strategie x je **nedominovaná**, jestliže **neexistuje** $y \succ x$.

Pokračování úvodního příkladů

$X_1 = I \setminus X_2 = \{0,1\}^I$, kde $\{0,1\}^I$ je množina zobrazení z I do $\{0,1\}$. Pak výherní funkce jsou $u_1(x, f) = \begin{cases} x, & \text{pro } f(x) = 1 \\ 0, & \text{pro } f(x) = 0 \end{cases}$ $u_2(x, f) = \begin{cases} 1 - x, & \text{pro } f(x) = 1 \\ 0, & \text{pro } f(x) = 0 \end{cases}$

Pro 1. hráče jistě $0 \prec x$ pro $x \neq 0$, protože $u_i(0, f_{\setminus i}) = 0$ ale $u_i(x, f_{\setminus i}) = \begin{cases} x, & \text{pro } f(x) = 1 \\ 0, & \text{pro } f(x) = 0 \end{cases} \geq 0$ Pro 2. hráče $f \prec g$ nastane právě tehdy, když v g souhlasíme ve více případech, tj. $\forall x : f(x) = 1 \implies g(x) = 1 \quad \text{and} \quad \exists x : f(x) = 0 \quad \text{and} \quad g(x) = 1$ Jinak zapsáno $f < g$.



Nyní předpokládejme $x \preceq y, \forall x, y > 0, x \neq y$, tj. hledáme $f : u_1(x, f_{\hat{i}}) > u_1(y, f_{\hat{i}})$ a pak stačí libovolná f , že $f(x) = 1, f(y) = 0$, z čehož dostaneme $1 > 0$.

“ Z pohledu řešení hry je rozumné neuvažovat libovolné dominované strategie. Tímto jsme ji ale vytrhli z kontextu. Tedy zde by si odmítnutím "budoval prestiž" na další hry. Zde by totiž 1. hráč si mohl vzít (skoro) celý interval (rohlík) a podle nedominované strategie by to 2. hráč přijal.

Definice $D\{SIT\}$ (Situace)

Sitací nazveme n -tici $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i \in N} X_i$.

Řekneme, že situace $\forall x = (x_1, \dots, x_n)$ **dominuje podle Pareta** situaci $\forall y = (y_1, \dots, y_n)$, pokud $\forall i \in N : u_i(\forall x) \geq u_i(\forall y) \text{ AND } \exists i \in N : u_i(\forall x) > u_i(\forall y)$

Pokračování úvodního příkladů

Například $x = \frac{2}{3}$ a $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$.

V tomto případě pro (x, f) mají $u_1(x, f) = u_2(x, f) = 0$.

Naopak $y = \frac{1}{2}$ a $g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{2}{3} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$.

V tomto případě pro (x, f) mají $u_1(y, g) = u_2(y, g) = \frac{1}{2}$

A tedy $(x, f) \preceq (y, g)$.

“ Pokud se dohodnou v obou situacích, pak o jejich dominování nemůžeme mluvit - jeden dostane méně, druhý více.

Definice $D\{ZAR\}$ (Zaručování)

Hráč i **si zaručuje** x_i , pokud $\exists x_i : \forall x_{\text{other } i} : u_i(x_i, x_{\text{other } i}) \geq x_i$ **Dolní hodnotou hry** pro i -tého hráče je $h^-_i = \sup_{x_i} \inf_{x_{\text{other } i}} u_i(x_i, x_{\text{other } i})$

Horní hodnotou hry pro i -tého hráče je $h^+_i = \inf_{x_i} \sup_{x_{\text{other } i}} u_i(x_i, x_{\text{other } i})$

U dolní hodnoty "škodící" hráči dopředu ví, co zahrají (první volíme v infimu, potom až v supremu)

Pro úvodní příklad je $h_1^- = h_2^- = 0$ a $h_1^+ = h_2^+ = 0$

Definice $D\{ROV\}$ (Rovnovážná situace)

Řekneme, že $\forall x$ je **rovnovážná situace (Nashova rovnováha)**, pokud $\forall i \in N : \forall y_i \in X_i : u_i(x_i, x_{\setminus i}) \geq u_i(y_i, x_{\setminus i})$

“ Pro každého hráče samostatně je dobré hrát takto

Mějme (x, f) pro $x > 0$, pak pro $f(y) = \begin{cases} 1, & y \leq x \\ 0, & y > x \end{cases}$.
Změňme x to y , pak pokud

- $y < x$, pak $u_1(x, f) = x$ a $u_1(y, f) = y < x$
- $y > x$, pak $u_1(x, f) = x$ a $u_1(y, f) = 0 < x$

Nyní změňme f to g , pak pro $g(x) = 1$ je $u_2(x, f) = x = u_2(x, g)$. Naopak pro $g(x) = 0$ je $u_2(x, g) = 0 \leq u_2(x, f)$.

Hra 2 hráčů

Zde $n = 2$ a značme

- x_1 jako x , X_1 jako X
- x_2 jako y , X_2 jako Y
- u_1 jako u
- u_2 jako v

Antagonistická hra je taková, že pro situace (x, y) a (\bar{x}, \bar{y}) , tak pokud $u(x, y) \geq u(\bar{x}, \bar{y}) \iff v(x, y) \leq v(\bar{x}, \bar{y})$

“ Paretovská dominance vylučuje antagonistickou hru

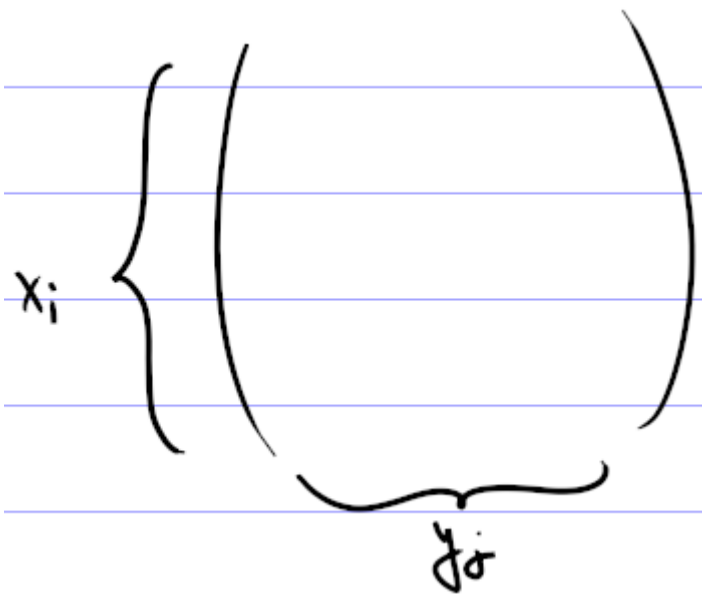
Hra s konstantním součtem nazýváme hru, kde $u(x, y) + v(x, y) = c$ a speciální případ jsou hry s **nulovým součtem**, kde $u(x, y) + v(x, y) = 0$

Šachy jsou hra s konstantním součtem (výhra - 1, remíza - 0.5). Naopak fotbal není (výhra - 3, remíza - 1), ale je antagonistická.

“ U kooperativních her mají hráči nějakým způsobem možnost dosahovat paretoovské dominance

Definice $\{D\{MAT\}$ (Maticová hra)

Mějme hru 2 hráčů, kde množiny X, Y jsou **konečné**. Pišme $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ AND $Y = \{y_1, \dots, y_l\}$ a pak situace uspořádáme do matice $X \times Y$ následovně



Matice A, B jsou pak **výherní matice** 1. a 2. hráče a $u(x_i, y_j) = A_{\{i,j\}}$.

Je-li navíc $A = -B$, pak jde o **maticovou hru**, což je hra s nulovým součtem.

“ **Pareto optimální** situace je taková, že **není** dominovaná podle Pareta

2. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}}
\xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}\,, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}\,, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}\,, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\,, #1}
\xdef\span#1{\mathrm{span}\,, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\,, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}\,, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}\,, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}\,, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2\,, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}\,, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{[#1]}} \xdef\str{\^*} \xdef\spv{\mc{V}} \xdef\civ{\mc{U}}
\xdef\other#1{\hat{#1}} $$
```

Definice $\mathcal{D}\{\text{KON}\}$ (Konečná hra)

Mějme množinu hráčů $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Pak hra $G = (M, X_i, u_i)$ je **konečná**, pokud jsou X_i **konečné**.

“ Na konečných hrách můžeme zavést tzv. *pravděpodobností rozšíření*

Definice $\mathcal{D}\{\text{SYM}\}$ (Symetrická hra)

Hra G 2 hráčů je symetrická právě tehdy, když $u(x, y) = v(y, x)$. V případě bimaticových her to je ekvivalentní s podmínkou $U^T = V$

Příklad (kámen, nůžky, papír)

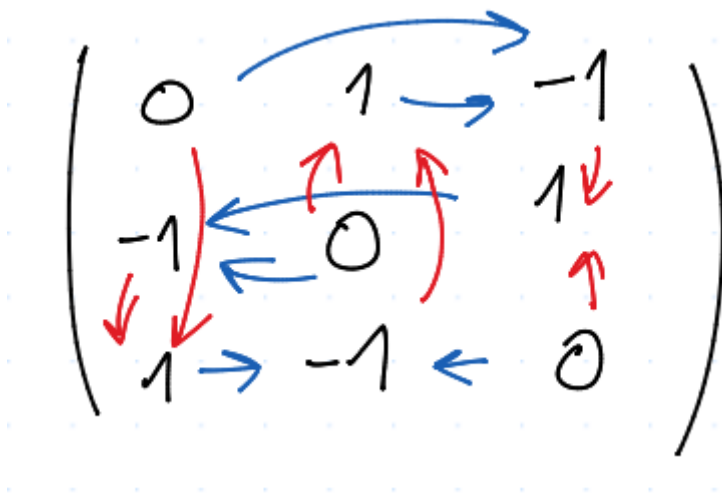
Mějme 2 hráče, tj. $N = \{1, 2\}$ a $X = Y = \{\text{K}, \text{N}, \text{P}\}$. Jelikož je to *bimaticová hra*, tak výhra je dána jako $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Sloupce a řádky jsou indexovány K, N, P

Podívejme se na *Nashovu rovnováhu*, tj. $u(x,y) \geq u(\bar{x}, y) \quad \text{pro libovolné } \bar{x}$
 $v(x,y) \geq v(x, \bar{y}) \quad \text{pro libovolné } \bar{y}$

“ Aneb si odbočením do jiného řádku si nepomůžeme

Aby nastala rovnováha, tak musí $u(x,y) = 1$, tj. $v(x,y) = 1$. Ale druhý hráč by mohl hrát \bar{y} tak, že $v(x, \bar{y}) = 1$.



“ Zde si všimněme, že pokud půjdeme podle šipek, tak nikdy neskončíme

Dominance by zde znamenalo, že by jeden řádek, byl větší než nějaký jiný - aneb 2 řádky by musely být porovnatelné (jakožto vektory)

Dolní hodnota $h_1^- = \sup_x \inf_y u(x,y)$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{inf}} -1 \\ \xrightarrow{\quad} -1 \\ \xrightarrow{\quad} -1 \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{sup}} \\ \xrightarrow{\text{sup}} \\ \xrightarrow{\text{sup}} \end{array} \\
 \begin{array}{l} \text{sup} \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \end{array} \\
 & \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{inf}} 1 \\ \xrightarrow{\quad} 1 \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{sup}} \\ \xrightarrow{\text{sup}} \end{array}
 \end{array}$$

a horní hodnota

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{inf}} -1 \\ \xrightarrow{\quad} -1 \\ \xrightarrow{\quad} -1 \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{sup}} \\ \xrightarrow{\text{sup}} \\ \xrightarrow{\text{sup}} \end{array} \\
 \begin{array}{l} \text{sup} \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \end{array} \\
 & \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{inf}} 1 \\ \xrightarrow{\quad} 1 \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{sup}} \\ \xrightarrow{\text{sup}} \end{array}
 \end{array}$$

Definice $\mathcal{D}\{\text{PRA}\}$ (Pravděpodobnostní rozšíření)

Mějme **konečnou** hru $G = (M, X_i, u_i)$. Pak definujeme **pravděpodobnostní rozšíření** $G_{\text{str}} = (N, X_{\text{str}}, u_{\text{str}})$, kde $X_{\text{str}} = \{a_i^1 x_i^1 + a_i^2 x_i^2 + \dots + a_i^{m_i} x_i^{m_i} \mid x_i^j \in X_i; \text{ a } a_i^1 + \dots + a_i^{m_i} = 1; \text{ a } a_i^j > 0\}$ je množina **konvexních kombinací strategií** a pro výhry platí $u_{\text{str}}(\sum_{j=1}^n (x_1^j, \dots, x_n^j) \in \prod X_i) = \sum_{j=1}^n (x_1^j, \dots, x_n^j) \in \prod X_i a_1^j a_2^j \dots$

$$a^{\{j_n\}_n} \cdot u_i(x^{\{j_1\}_1}, \dots, x^{\{j_1\}_n})$$

Pokračování příkladu

Počítejme pravděpodobnostní rozšíření, tj. $u((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = p_1 q_1 \overbrace{u(\text{K}, \text{K})}^0 + p_1 q_2 \overbrace{u(\text{K}, \text{N})}^1 + p_1 (1 - q_1 - q_2) u(\text{K}, \text{P}) + \dots$ kde

- p_1 je pravděpodobnost zahrání K prvním hráčem
- p_2 je pravděpodobnost zahrání N prvním hráčem
- q_1 je pravděpodobnost zahrání K druhým hráčem
- q_2 je pravděpodobnost zahrání N druhým hráčem
- $1 - p_1 - p_2$ je pravděpodobnost zahrání P prvním hráčem

To ale můžeme napsat jako $u((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = \text{tr}\{p_1 \& p_2 \& (1 - p_1 - p_2)\} U \text{tr}\{q_1 \setminus q_2 \setminus 1 - q_1 - q_2\}$

Potom pro $\text{tr}\{1/3 \& 1/3 \& 1/3\} U = \text{tr}\{0 \& 0 \& 0\} \setminus \text{tr}\{0 \& 0 \& 0\} \text{tr}\{q_1 \setminus q_2 \setminus 1 - q_1 - q_2\} = 0$ Tedy strategie $(1/3, 1/3, 1/3)$ a $(1/3, 1/3, 1/3)$ tvoří **rovnovážnou situaci** a navíc $h_1^{\{-\}} = h_1^{\{+\}} = 0$

Prvky $x_i \in X_i$ nazýváme **smíšené strategie** a původní strategie do tohoto nového prostoru vnoříme volbou pravděpodobnostního rozdělení $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. V tomto smyslu takovým strategiím říkáme **čisté strategie**

Věta $\{D\{\text{NASH}\}$ (Nashova)

Pravděpodobnostní rozšíření **každé konečné** hry má **rovnovážnou situaci**.

Důkaz

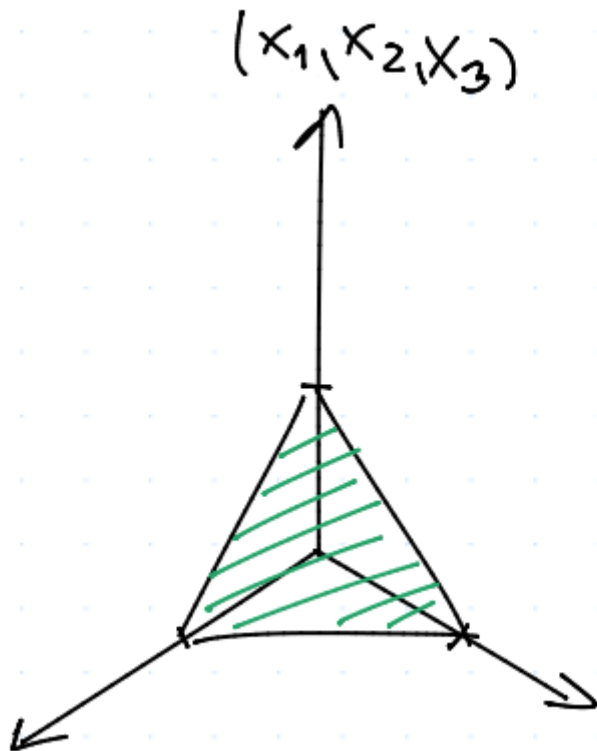
Mějme rovnováhu $\forall x$, tj. $u_i(\forall x) \geq u_i(x_i, x_{\text{other } i})$ Dále označme $B_i(x_{\text{other } i})$ **nejlepší odpovědi** na volbu protihráčů $x_{\text{other } i}$. Tedy $\forall x$ je rovnováha právě tehdy, když $\forall i \in N: \text{quad } x_i \in B_i(x_{\text{other } i})$ Tedy $B_i: \prod_{j \neq i} X_j \rightarrow \text{P}(X_i)$ a pokud dáme B_i dohromady jako $B = (B_i)_{i \in N}$, $\text{quad } B: \prod_{i \in N} X_i \rightarrow \text{P}(\prod_{i \in N} X_i)$

Pod P zde myslíme "power set" (potenční množina) - pro jednu situaci může být více nejlepších strategií (odpovědí)

B je tedy (množinová) funkce na prostoru situací. Podle Kakutanyho věty o pevném bodě existuje $x \in B(x)$, což je rovnovážná situace. \blacksquare

Mějme $u(\forall x) = (x) U (y)$

V rovnovážně situaci nám budou vycházet stěny polyedru



Příklad - využití pro (bi)maticové hry

Mějme $U = \{1 \text{ \& } 0 \text{ \& } 0 \text{ \& } 2\}$, $V = \{0 \text{ \& } 1 \text{ \& } 2 \text{ \& } 0\}$

$$\begin{array}{c}
 q \quad 1-q \\
 p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \rightarrow 1 \\ 2 \leftarrow 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Tedy celkem $u(p,q) = pq + 2(1-p)(1-q)$ $v(p,q) = p(1-q) + 2(1-p)q$

“ Rovnováha je tak, že druhý hráč nemá kam pohnout (je mu to jedno)

Indiferenční rovnice - chceme zařídit, aby u nezáviselo na p a v na q

V našem případě $u(p,q) = p(\underbrace{q - 2 + 2q}_0) + 2(1-q) \implies 3q - 2 = 0 \implies q = \frac{2}{3}$
 $v(p,q) = q(\underbrace{-p + 2 - 2p}_0) + p \implies 3p - 2 = 0 \implies p = \frac{2}{3}$

Tedy pravděpodobnostní rozdělení $((2/3, 1/3), (2/3, 1/3))$ tvoří **rovnovážnou situaci** a $u(v, x) = \frac{2}{3}, \quad v(v, x) = \frac{2}{3}$

Věta D_{ANT}

U antagonistických her platí, že strategie je **optimální** právě tehdy, když je **opatrná**. Řekneme, že strategie x_i je **opatrná**, pokud zaručuje h_i^- .

“ Strategii nazveme **optimální**, pokud tato strategie realizuje nějakou rovnovážnou situaci

Pokud počítáme h_1^- , tak "zjišťujeme, co mi může soupeř provést", tj.
$$u(p, q) = q(p - 2 + 2q) + 2(1-p) \quad \&= \quad q(\underbrace{3p - 2}_0) + 2(1-p) \quad \&= \quad \frac{2}{3}$$

“ Při zvýšení p dá soupeř $q = 0$ a já si pohorším, naopak s menším p dává soupeř $q = 1$

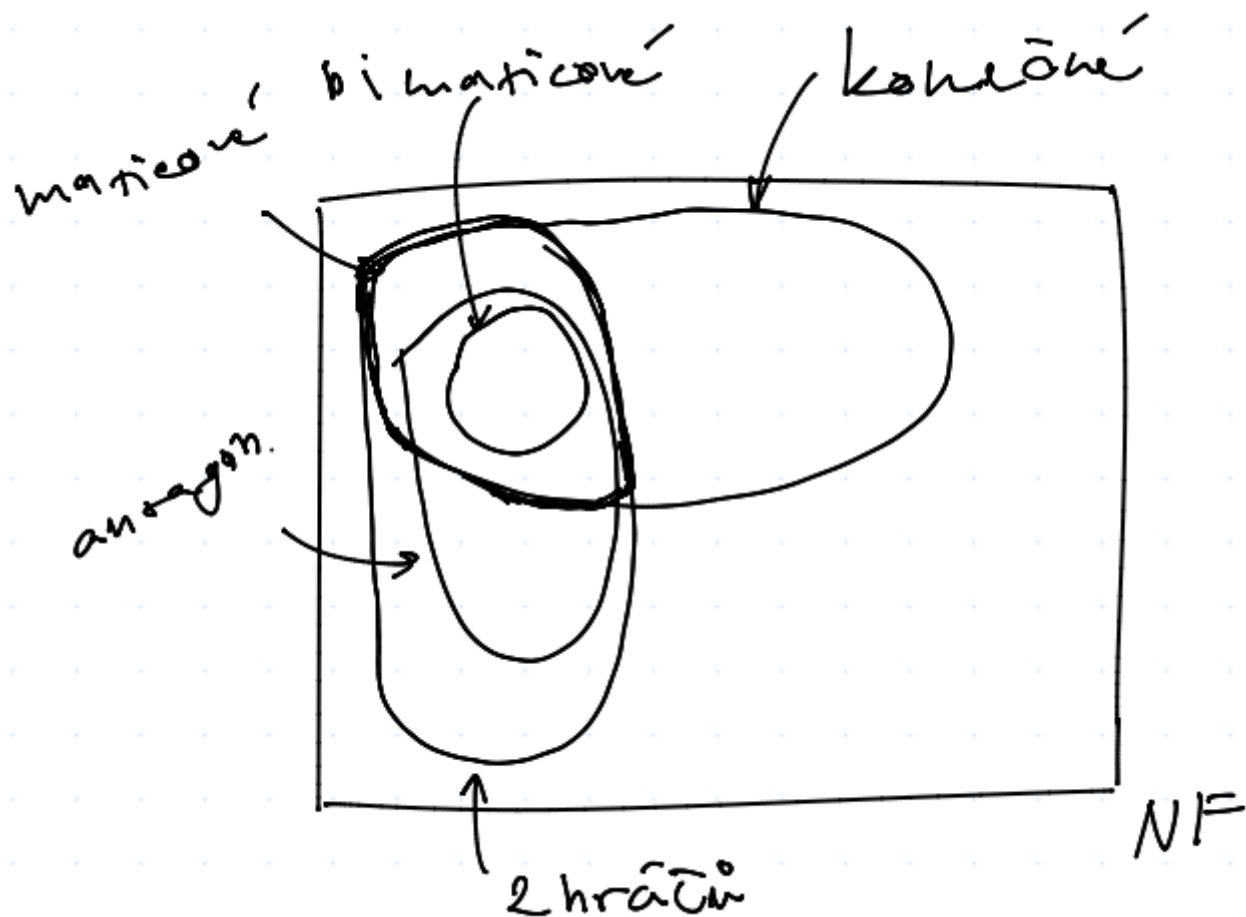
Tedy $h_1^- = \frac{2}{3}$ a tato strategie je **opatrná**.

“ Pravděpodobnostní rozšíření na nekonečných prostorech se konstruuje přes míry a Riemann-Stieltjesův integrál

3. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\nmtr#1{\begin{matrix} #1 \end{matrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}}
\xdef\mc#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}}
\xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi}
\xdef\Tagged#1{(\text{#1})} \xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-
#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}}
\xdef\conv#1{\mathrm{conv}\,, #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\,, #1}
\xdef\aff#1{\mathrm{aff}\,, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\,, #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\,,
#1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\,, #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1}
\xdef\interior#1{\mathrm{int}\,, #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\,, #1}
\xdef\grad#1{\mathrm{grad}\,, #1} \xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1}
\xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1} \xdef\hess#1{\nabla^2\,, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x
#1} \xdef\jacobx#1{D_x #1} \xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1}
\xdef\co#1{\mathrm{co}\,, #1} \xdef\iter#1{^{\{#1\}}} \xdef\str{^*} \xdef\spv{\mc V}
\xdef\civ{\mc U} \xdef\other#1{\hat{#1}} $$
```

Přehled her



Bimaticové hry 2x2

Mějme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

V případě dominování, např. $a > b$ a $c > d$, je to jednoduché... Tedy předpokládejme, že žádný řádek nedominuje pro 1. hráče a žádný sloupec pro 2. hráče.

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

A tedy $u(p,q) = \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$, $v(p,q) = \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$

Rovnováhy

Hráč 2 chce zabránit volit tomu prvnímu a tedy indifferenční rovnice je tvaru $u(0, q) = u(1, q) \implies c + q(1-q) = a + b(q(1-q) + (c-d)q + d) = (a-b)q + b + (a-b-c+d)q = d-b$
 $q = \frac{d-b}{a-b-c+d}$ a opačně $v(p, 0) = v(p, 1) \implies p(1-p)f + h = p(1-p)e + g \implies p(f-e-h+g) - h+g = 0 \implies p = \frac{g-h}{f-e-g+h}$

Pak tedy rovnovážná strategie ve smíšených strategiích je tvaru (p, q)

Dolní hodnota

Počítejme h_1^- a tedy bychom chtěli zjistit, jak máme volit p , aby nám bylo jedno, jak hraje 2. hráč $u(p, 0) = u(p, 1) \implies p(1-p)b + d = p(1-p)a + c \implies p = \frac{d-c}{a-b-c+d}$

Příklady her 2x2

Mějme $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ to $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ to $C = \begin{pmatrix} 4/7 & 1/7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Normalizace hry: První posuneme hru do kladných čísel, pak ji "zmenšíme" tak, že největší výhra 1 Tj.

- $\min A = 0$
- $\max A = 1$

⚡ **Pozor**, pořád jsou to ekvivalentní hry!!

Přehled základních her 2x2

⚡ Prozkoumejme čtveřici $(0, 1, 2, 3)$

- mince** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tato hra **není** symetrická, ale je "spravedlivá" (kdyby si vyměnili role, tak jim to nepomůže). Zřejmě ani jeden z hráčů nemá dominovanou strategii. Počítejme rovnováhu $q = \frac{1-0}{1-0-0+1} = \frac{1}{2}$ a rovnováha je $(p, q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Přičemž dolní hodnota $q = \frac{1-0}{1-0-0+1} = \frac{1}{2}$ a proto $h_1^- = \frac{1}{2}$
- na kočku a myš**
 Kočka má na výběr z vytápěné/nevytápěné místnosti (světice/komora) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

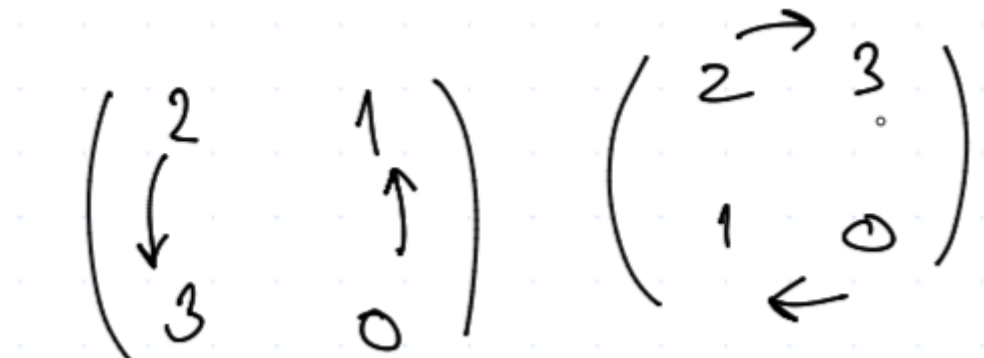
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A tedy máme situace $(3, 0) \sqquad (1, 3) \succ (0, 2) \sqquad (1, 2)$ Tato hra **není** ani antagonistická, ani s nulovým součtem. Evidentně existuje rovnováha pouze v smíšených situacích

3. líný rodič

Rodiče chtějí, aby potomek přežil, ale chceme se flákat a nechat to na tom druhém. Je to jistě symetrická hra $\text{mtr}\{\text{stará se} \setminus \text{nestará se}\} \text{mtr}\{2 \setminus 3 \setminus 0\}$, $\text{mtr}\{2 \setminus 3 \setminus 1 \setminus 0\}$ a potom máme situace $(0, 0) \prec (2, 2)$, $\underbrace{(1, 3), (3, 1)}_{\text{rovnováhy v čistých}}$ Rozhodně nejde o hru, která aby antagonistická nebo s nulovým součtem.



Ve smíšených strategiích $q = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = \text{symetrie} = p$ a tedy $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \text{mtr}\{\frac{1}{2} \setminus \frac{1}{2}\} = \frac{3}{2}$. Tedy je lepší, aby se oba rodiče starali, než kdyby to nechali na náhodu

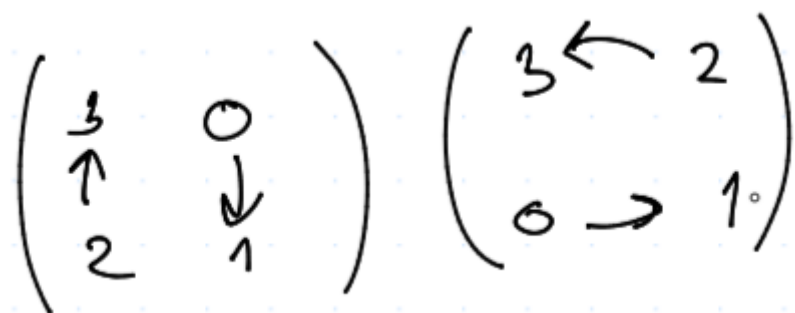
4. na kuře

Jedeme proti sobě autem a pokud uhnu dřív, než soupeř, tak jsem prohrál a jsem zbabělec $\text{mtr}\{\text{uhnu} \setminus \text{zůstanu}\} \text{mtr}\{0 \setminus -1 \setminus 1 \setminus -10\}$ Po normalizaci dostaneme hru tvaru **líný rodič**.

5. lov na jelena

Máme 2 lovce, kteří se nemohou domluvit. Pokud loví dohromady, tak mají šanci ulovit jelena, ale jeden sám ho neuloví. Navíc můžeme ulovit max 2 zajíce, kteří jsou v lese. $\text{mtr}\{\text{jdu na jelena} \setminus \text{jdu na zajíce}\} \text{mtr}\{3 \setminus 0 \setminus 2 \setminus 1\} \setminus \text{mtr}\{3 \setminus 2 \setminus 0 \setminus 1\}$ Potom situace rovnováhy jsou $(1, 1), (3, 3)$, přičemž z ní "jednostraně" nemůžeme uhnout. Navíc $(3, 3)$ je dominující strategií (je optimální). Jediná **opatrná** strategie je zde jít si pro zajíce.

„Ilustruje, že příroda si může vybrat rovnováhu, která **není** nejlepší - přechod na nejlepší rovnováhu by vyžadoval domluvu.“

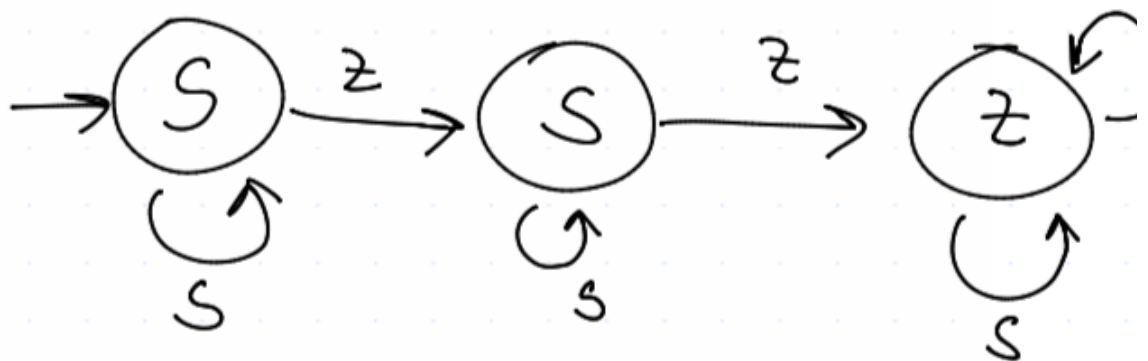


6. věžňovo dilema

Máme 2 vězně, kde každý má na výběr buď mlčet (spolupracovat s spolupachatelem) nebo to zkusím hodit na spolupachatele (zradit). Jistě je to navíc symetrická hra $\begin{matrix} & \text{spolupracovat} & \text{zradit} \\ \text{spolupracovat} & -1 & -3 \\ \text{zradit} & 0 & -2 \end{matrix}$ Po normalizaci si snažíme maximalizovat roky na svobodě (snažíme si ušetřit trest). Jistě navíc $\begin{matrix} & \text{spolupracovat} & \text{zradit} \\ \text{spolupracovat} & 2 & 0 \\ \text{zradit} & 3 & 1 \end{matrix}$ Přičemž $(2,2)$ je jediná rovnovážná situace i ve smíšených strategiích.

V případě opakované hry se rozhodujeme v závislosti na předchozích rozhodnutích. Můžeme řešit pomocí stavového automatu:

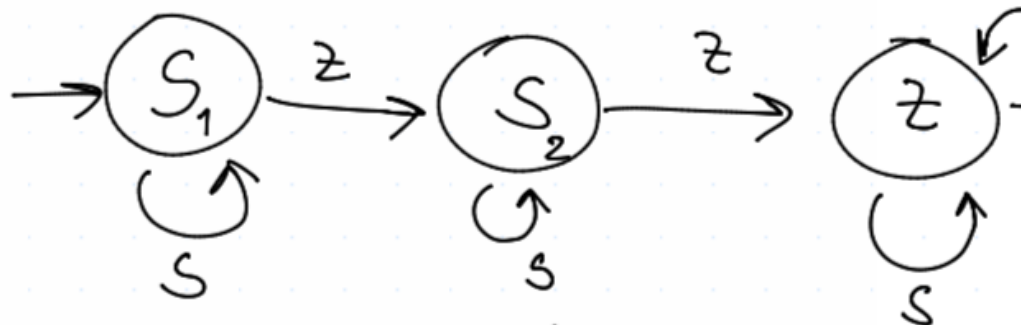
3 stavový automat



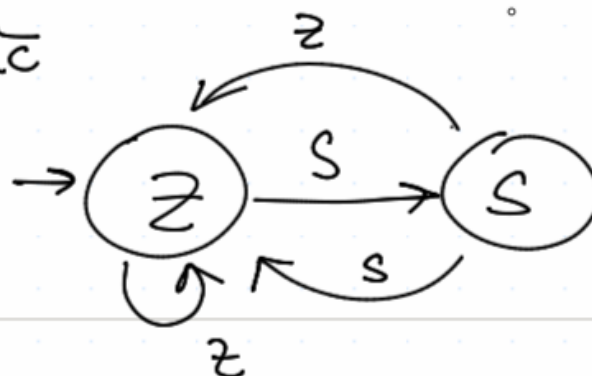
a celkem

3 stavový automat

1. hráč



2. hráč



Celkem (v situacích)

Příčemž automaty jsou "strategie s omezenou pamětí"

4. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\mntr#1{\begin{matrix} #1 \end{matrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}}
\xdef\mcal#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}}
\xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi}
\xdef\Tagged#1{\text{#1}} \xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-
#1}{\text{#1}}} \xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}}
\xdef\conv#1{\mathrm{conv}\,, #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\,, #1}
\xdef\aff#1{\mathrm{aff}\,, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\,, #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\,,
#1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\,, #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1}
\xdef\interior#1{\mathrm{int}\,, #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\,, #1}
\xdef\grad#1{\mathrm{grad}\,, #1} \xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1}
\xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1} \xdef\hess#1{\nabla^2\,, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x
#1} \xdef\jacobx#1{D_x #1} \xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1}
\xdef\co#1{\mathrm{co}\,, #1} \xdef\iter#1{^{[#1]}} \xdef\str{^*} \xdef\spv{\mcal V}
\xdef\civ{\mcal U} \xdef\other#1{\hat{#1}} $$
```

Opakované hry

“ Znovu definujeme **strategii**, jako celkový vzorec chování (algoritmus, kterým vybíráme **akci** pro dané kolo). **Akce** je výběr pro dané kolo.

Rozdělme si je na

- *konečné opakování*
- *nekonečné opakování*

Konečné věžňovo dilemma

Mějme matici hry
$$\begin{matrix} & \text{spolupracovat} & \text{zradit} \\ \begin{matrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{matrix} & \end{matrix}$$

Nyní předpokládejme, že ji budeme hrát $2 \times$:

- Jistě v 2. druhém kole bude výhodné zradit (ZZ)
- Jelikož v 2. kole dávalo smysl pouze zradit, tak i v prvním kole budeme zrazovat, protože 2. kolo stejně nijak neovlivníme

Obecně pro konečné opakování vězňova dilematu vede k výsledku ZZ pro všechna kola

Nekonečné vězňovo dilema

Můžeme interpretovat, že nevíme, které kolo je poslední.

Celkovou výhru si definujeme jako:

1. Mějme výhry prvního hráče v i -tém kole u_1, u_2, \dots Pak vezmeme **částečný průměr**, který pošleme do limity, jako výhru, tj. $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$ Avšak pro například řadu výher $1, 0, \underbrace{1}_2, 0, \underbrace{1}_4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \underbrace{1}_3, \dots$

“ Tedy částečné průměry **nefungují obecně**

2. Pomocí **disktování**

Zavedme $\delta \in (0,1)$ (diskontní faktor) a pak $\bar{u}_1 = \delta u_1, \bar{u}_2 = \delta^2 u_2, \dots, \bar{u}_n = \delta^n u_n$

“ Tedy v tomto případě mají větší hodnotu "peníze" (výhra), která je teď. Navíc je degradace hry pořád stejná
Velké δ můžeme interpretovat jako "strádatele"... Pro malé δ "žije hráč okamžikem" $u = \delta u_1 + \delta^2 u_2 + \dots$ Lze vždy sečíst

3. **Overtaking**

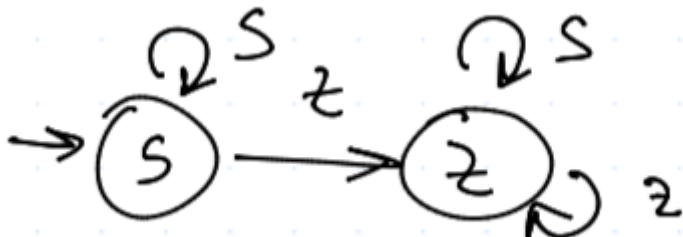
Pro 2 posloupnosti výher $u_1, u_2, \dots, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots$ Pak řekneme, že $u_i \succ \bar{u}_i$ pokud $\liminf_{n \rightarrow \infty} (u_1 - \bar{u}_1) + \dots + (u_n - \bar{u}_n) > 0$

“ Z pohledu psychologie je pro nás důležitější výsledek "ve většině případů"

Jsou-li strategie hráčů dány konečnými automaty, pak lze výhry sečíst částečným průměrováním.

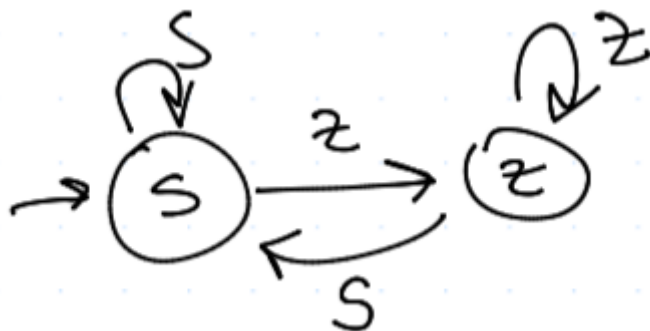
Vybrané strategie pro věžňovo dilema

Spoušť (Trigger)

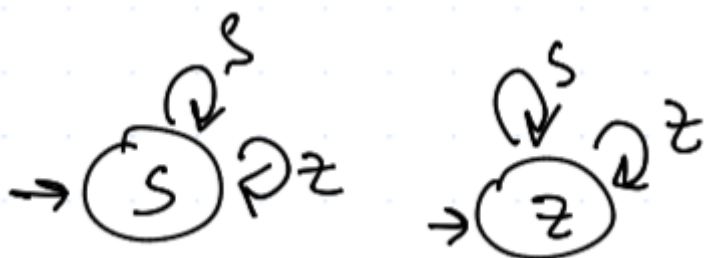


“ Hodí se pro existenční důkazy

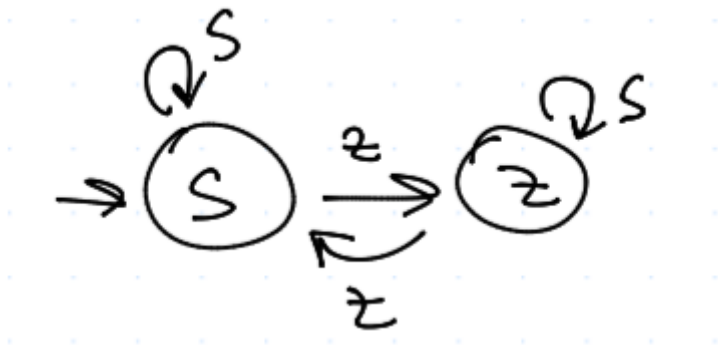
Oko za oko (TFT - Tit For Tat)



Hrdlička a Jestřáb (Always Cooperate (AIC) / Always Defect (AIID))



Pavlov (pes) (Win Stay Lose Switch - WSLS)



Často zavádíme šum $\epsilon > 0$ a předpokládáme, že hráč dodrží svou strategii (plán své strategie) s pravděpodobností $1 - \epsilon$, tj. s pravděpodobností ϵ dojde k zahrání opačné akce.

Podívejme se nyní na

TFT vs. TFT

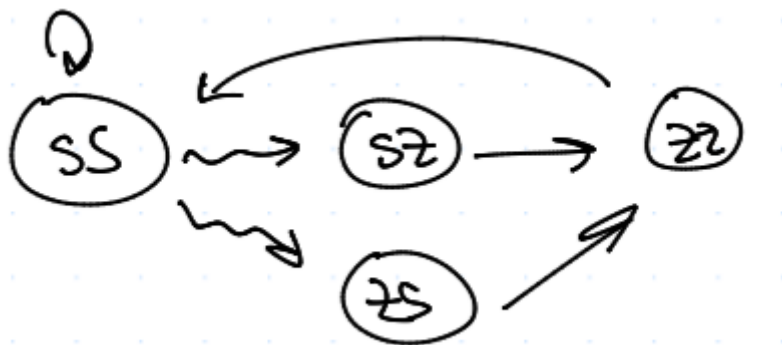
Možné stavy



Počítejme výhru prvního částečným průměrováním $u = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{0 + 3}{2} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{2}$

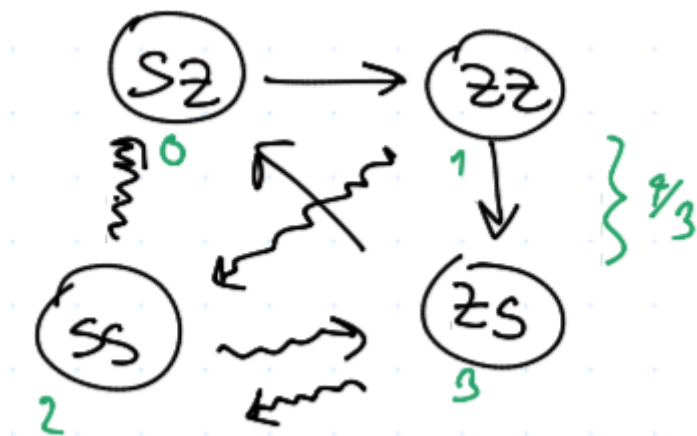
“Oko za oko je trochu moc přísné

WSLS vs. WSLS



Přičemž $u \approx 2 - \sqrt{x}$

TFT vs. WSL



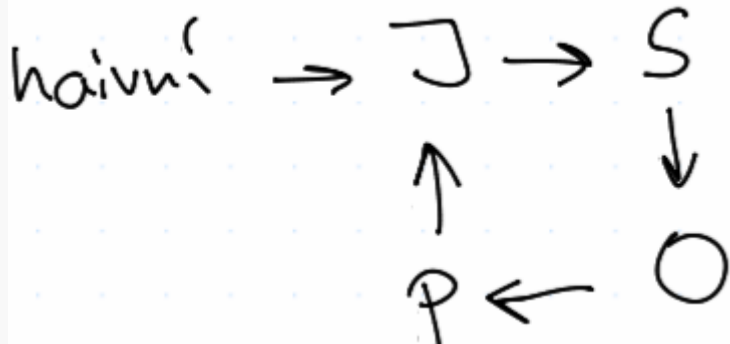
Turnaj

X	S	O	H	J	P	\sum
S	≈ 1	≈ 1	$\approx 5/2$	≈ 1	≈ 1	$\approx \frac{13}{2}$
O						
H						
J					2	
P				$\frac{1}{2}$		

“ Pokud je hodně "pes" strategií v Turnaji, tak vyhraje, protože spolu dobře spolupracuje

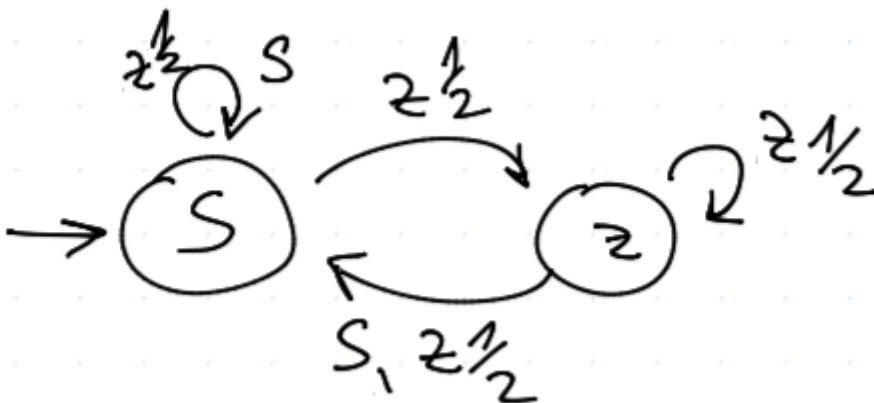
V "evoluční/populační" variantě, tj. necháváme potomky dobrých strategií v turnaji, často vyhraje pes, protože hraje dobře sám se sebou

Naopak je vidět, že Jestřáb umí vytěžit psa



Strategie se stochastickými přestupy

Šlechtné oko



nebo můžeme udělat novou parametrizaci

- p_0 - pravděpodobnost spoluprací na začátku
 - $1 - p_0$ - začnu zradou
- p_1 - pst. přechodu od SS ke spolupráci
- p_2 - pst. přechodu od SZ ke spolupráci
- p_3 - pst. přechodu od ZS ke spolupráci
- p_4 - pst. přechodu od ZZ ke spolupráci

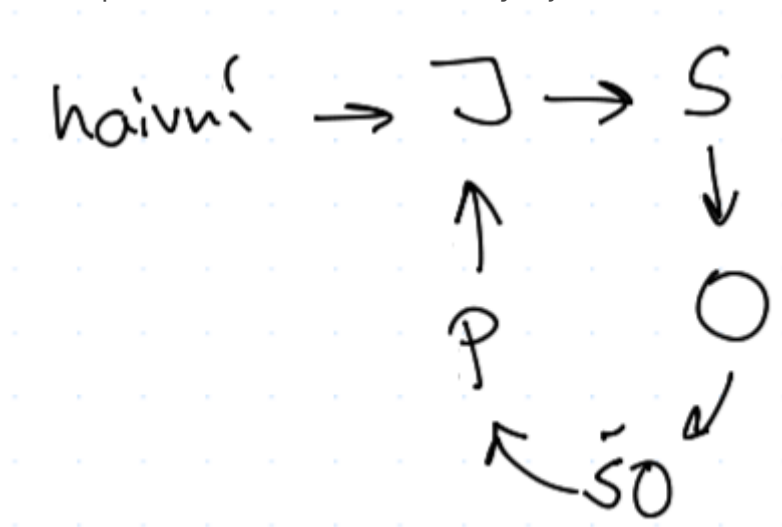
	$\rightarrow S$	SS $\rightarrow S$	SZ $\rightarrow S$	ZS $\rightarrow S$	ZZ $\rightarrow S$	
X	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	šum

	$\$to\$ S$	$SS \$to\$ S$	$SZ \$to\$ S$	$ZS \$to\$ S$	$ZZ \$to\$ S$	
J	0	0	0	0	0	$$(\vee, \vee, \vee, \vee, \vee)$$
H	1	1	1	1	1	$$(1 - \vee, \dots)$$
S	1	1	0	0	0	
O	1	1	0	1	0	
P	1	1	0	0	1	
ŠO	1	1	$$(\frac{1}{2})$$	1	$$(\frac{1}{2})$$	

“ Všechny zmíněné byly tzv. **jednopaměťové strategie**, tzn. akce vychází pouze z předchozího kola

“ V Axelrodově turnaji byly i strategie s delší pamětí, ale nebyly moc dobré

V této parametrizaci v evolučním vývoji nastalo



“ Je to svým způsobem analogie pravděpodobnostního rozšíření, kdy strategie definujeme jako pětice parametrů

Jak dopadne $$(p_0, \dots, p_4)$$ proti $$(q_0, \dots, q_4)$$?

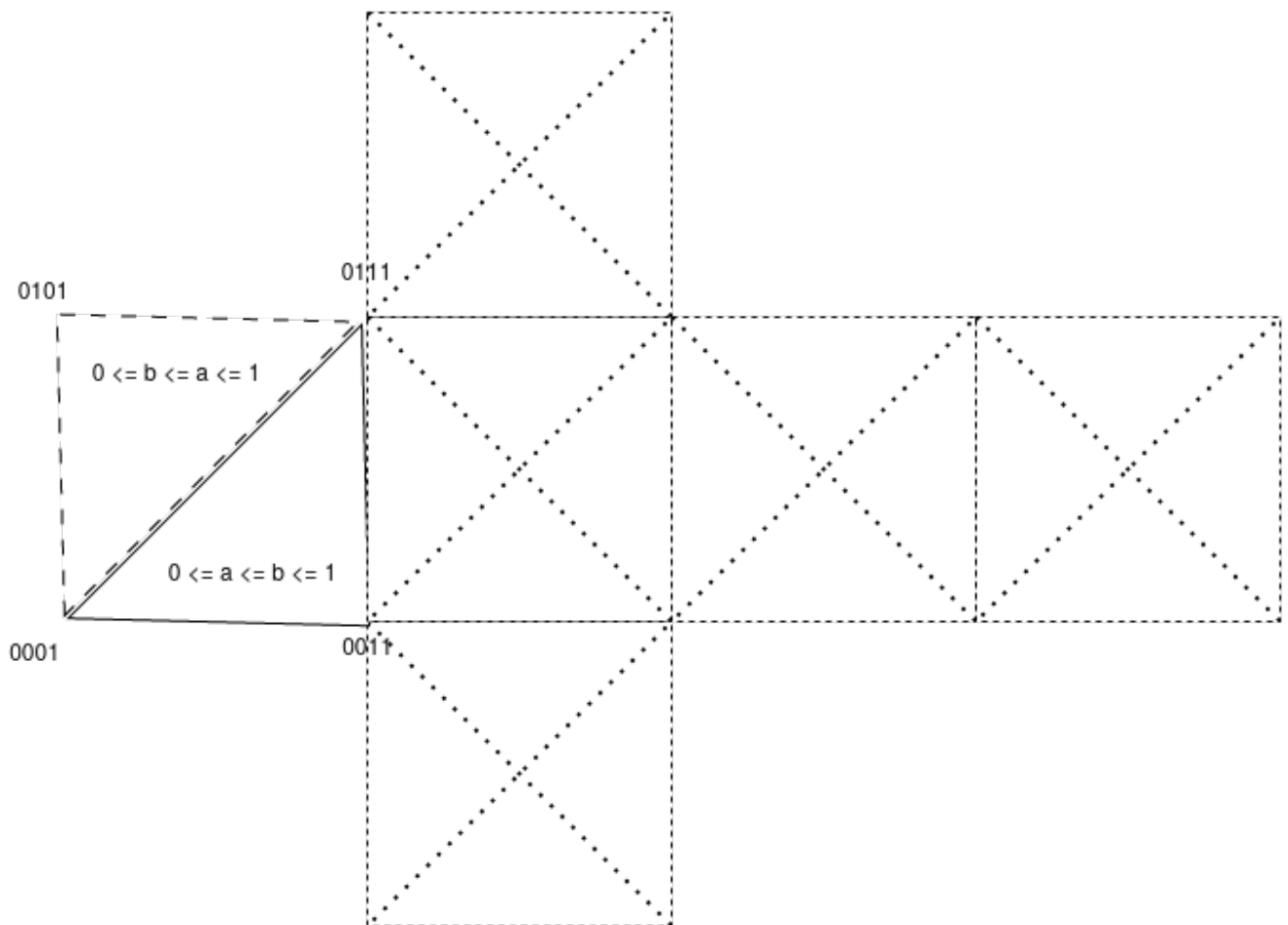
5. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\nmtr#1{\begin{matrix} #1 \end{matrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}}
\xdef\mc#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}}
\xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi}
\xdef\Tagged#1{(\text{#1})} \xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-
#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}}
\xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}}
\xdef\conv#1{\mathrm{conv}\,, #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\,, #1}
\xdef\aff#1{\mathrm{aff}\,, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\,, #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\,,
#1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\,, #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1}
\xdef\interior#1{\mathrm{int}\,, #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\,, #1}
\xdef\grad#1{\mathrm{grad}\,, #1} \xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1}
\xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1} \xdef\hess#1{\nabla^2\,, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x
#1} \xdef\jacobx#1{D_x #1} \xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1}
\xdef\co#1{\mathrm{co}\,, #1} \xdef\iter#1{^{[#1]}} \xdef\str{^*} \xdef\spv{\mc V}
\xdef\civ{\mc U} \xdef\other#1{\hat{#1}} $$
```

Klasifikace 2x2 her

Předpokládejme, že máme hru $\text{\mtr{ 0 \& a \ b \& 1 }}$, kde $0 \leq a \leq b \leq 1$, což v extrémech odpovídá

0	a	b	1
0	1	1	1
0	0	0	1
0	0	1	1



“ Tady změna krychle odpovídá změně jedné nerovnosti

Opakované hry

Mějme strategii v 1-paměťovém prostředí $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)$, kde

- p_0 - pravděpodobnost *spolupráce* SS na začátku (v 1. kole)
- p_1 - pravděpodobnost *spolupráce* SS po SS
- p_2 - pravděpodobnost *spolupráce* SS po SZ
- p_3 - pravděpodobnost *spolupráce* SS po ZS
- p_4 - pravděpodobnost *spolupráce* SS po ZZ

“ $1 - p_i$ je pravděpodobnost *zrady* Z po \dots

A necht' soupeř má strategii $(q_0, q_1, q_2, q_3, q_4)$, přičemž si uvědomme, že ZS pro nás je SZ pro něj apod.

Napišme si výherní matici do řádku do **výherního vektoru** $w = \underline{(w_1, w_2, w_3, w_4)}_{\{(SS, SZ, ZS, ZZ)\}}$

A pak výhru v n -tém kolem dostaneme jako $(u(p,q))_n = w \cdot \text{tr}\{P_1 \cdot \dots \cdot P_n\}$, kde P_i je pravděpodobnost, že hra dospěla do stavu SS, SZ, ZS, ZZ

Vektor $\text{tr}\{P_1 \cdot \dots \cdot P_n\}$ určíme pomocí teorie markovských řetězců. Spočítejme si přechodovou matici A - ta bude mít tvar $A = \begin{matrix} & SS & SZ & ZS & ZZ \\ \begin{matrix} SS \\ SZ \\ ZS \\ ZZ \end{matrix} & \begin{matrix} p_1 q_1 & p_1 q_2 & p_1 q_3 & p_1 q_4 \\ p_2 q_1 & p_2 q_2 & p_2 q_3 & p_2 q_4 \\ p_3 q_1 & p_3 q_2 & p_3 q_3 & p_3 q_4 \\ p_4 q_1 & p_4 q_2 & p_4 q_3 & p_4 q_4 \end{matrix} & \begin{matrix} (1-p_1)q_1 & (1-p_1)q_2 & (1-p_1)q_3 & (1-p_1)q_4 \\ (1-p_2)q_1 & (1-p_2)q_2 & (1-p_2)q_3 & (1-p_2)q_4 \\ (1-p_3)q_1 & (1-p_3)q_2 & (1-p_3)q_3 & (1-p_3)q_4 \\ (1-p_4)q_1 & (1-p_4)q_2 & (1-p_4)q_3 & (1-p_4)q_4 \end{matrix} \end{matrix}$

A pak jistě platí $P = A^n \cdot \text{tr}\{p_0 q_0 \cdot p_0 (1 - q_0) \cdot \dots\}$

Za předpokladu stability se neprojeví počáteční vektor $\text{tr}\{p_0 q_0 \cdot p_0 (1 - q_0) \cdot \dots\}$, ale hra dospěje do vektoru $\text{tr}\{v \cdot x\}$ takového, že $A \cdot v \cdot x = v \cdot x$

Matice A musí být **pravděpodobnostní**, tj. suma v každém sloupci musí být 1.

Tento problém řešíme jako $A \cdot v \cdot x = x \cdot (A - I) \cdot v \cdot x = 0$, kde $v \cdot x$ říkáme **stacionární vektor** (z linearity dostaneme, že řešení musí být jediné až na násobek), který také musí být *pravděpodobnostní*, tj. $\sum v \cdot x = 1$.

Rozepišme si $A - E = \begin{matrix} & SS & SZ & ZS & ZZ \\ \begin{matrix} SS \\ SZ \\ ZS \\ ZZ \end{matrix} & \begin{matrix} p_1 q_1 - 1 & p_1 q_2 & p_1 q_3 & p_1 q_4 \\ p_2 q_1 & p_2 q_2 - 1 & p_2 q_3 & p_2 q_4 \\ p_3 q_1 & p_3 q_2 & p_3 q_3 - 1 & p_3 q_4 \\ p_4 q_1 & p_4 q_2 & p_4 q_3 & p_4 q_4 - 1 \end{matrix} \end{matrix}$, což řešíme pomocí **Cramerova pravidla**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right)$$

B

a tedy $x_1 = \frac{|B_1|}{|B|}$

kde B_1 je matice, kde jsme 1. sloupec vyměnili za sloupec pravých stran

V tuto chvíli, pokud budeme pouze sčítat řádky, tak se nám nemění determinant. Tedy přičteme 1. řádek z B k tomu 2. a 3., tj.

$$|B| = \begin{vmatrix} P_1 q_1 - 1 & P_2 q_3 & P_3 q_2 & P_4 q_4 \\ P_1 - 1 & P_2 - 1 & P_3 & P_4 \\ q_1 - 1 & q_3 & q_2 - 1 & q_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

A provedme Laplaceův rozvoj podle 1. řádků pro B_1

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 0 & P_2 q_3 & P_3 q_2 & P_4 q_4 \\ 0 & P_2 - 1 & P_3 & P_4 \\ 0 & q_3 & q_2 - 1 & q_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} P_2 q_3 & P_3 q_2 & P_4 q_4 \\ P_2 - 1 & P_3 & P_4 \\ q_3 & q_2 - 1 & q_4 \end{vmatrix}$$

Obdobně bychom postupovali i pro B_2

$$|B_2| = \begin{vmatrix} P_1 q_1 - 1 & P_3 q_2 & P_4 q_4 \\ ; & ; & ; \end{vmatrix}$$

Celkem naše výhra $u = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots$ $u = w_1 \frac{|B_1|}{|B|} + w_2 \frac{|B_2|}{|B|} + \dots$ $u = \frac{w_1 |B_1| + w_2 |B_2| + \dots}{|B|}$, přičemž jmenovatel můžeme vnímat jako Laplaceův rozvoj pro B , kde místo vektoru 1 jsme dali vektor w , tj.

$$|C| = \begin{vmatrix} p_1 q_1 - 1 & p_2 q_3 & p_3 q_2 & p_4 q_4 \\ p_1 - 1 & p_2 - 1 & p_3 & p_4 \\ q_1 - 1 & q_3 & q_2 - 1 & q_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}$$

Celkem výhru dostaneme jako $u = \frac{|C|}{|B|}$

Uvědomme si, že každá proměnná je lineární v každém z determinantů (vyskytuje se vždy pouze v jednom sloupci), tj. $u = \frac{\alpha p_i + \beta}{\gamma p_i + \delta}$

Počítejme optimální vektor (p_1, \dots, p_4) , tedy $\frac{\partial u}{\partial p_i} = \frac{\alpha(\gamma p_i + \delta) - (\alpha p_i + \beta) \gamma}{(\gamma p_i + \delta)^2}$ $\frac{\partial u}{\partial p_i} = \frac{\alpha \delta - \beta \gamma}{(\gamma p_i + \delta)^2} > 0$

Tedy to znamená, že řešíme znaménko pouze u $\alpha \delta - \beta \gamma$

Tedy se výhra řídí ryze rostoucí, či ryze klesající, funkcí v každém parametru

Celkem nejlepší protihra (odpověď) se realizuje nějakou "rohovou" strategií, tj. volbou $p_i \in \{0, 1\}$ (nebo s šumem $\{v, 1 - v\}$)

Případě, že nám vyjde parciální derivace nulová, tak dostaneme "nerohové strategie", což odpovídá celé jedné stěně hyperkrychle $[0, 1]^4$.

Spočítejme si nyní onu parciální derivaci "pořádně":

$\frac{\partial}{\partial p_1}$

$$\frac{\partial |B|}{\partial p_1} = \begin{vmatrix} q_1 & p_2 q_3 & \cdot & \cdot \\ 1 & p_2 - 1 & \cdot & 1 \\ 0 & q_3 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial |C|}{\partial p_1} = \begin{vmatrix} \text{---} & // & \text{---} \\ 0 & w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Z tohoto dostáváme podle **Sarrusovy-Jacobiho formule**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & \boxed{A} & e \\ f & g & h \end{vmatrix} \cdot |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ d & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & e \\ g & h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & c \\ A & e \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & A \\ f & g \end{vmatrix}$$

ve smyslu jejího značení $|A| = \begin{vmatrix} p_2 q_3 & \dots & p_2 - 1 & \dots & q_3 & \dots \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ p_1 q_1 - 1 & & & q_1 \\ p_1 - 1 & A & & 1 \\ q_1 - 1 & & & 0 \\ w_1 & w_2 & & 0 \end{vmatrix}$$

“ V této formě to na zkoušce **nebude**

Speciální strategie v IPD

- **ekvalizátor** - soupeř si volí q tak, aby u byla konstantní
 - realizuje se lineární závislostí $\begin{pmatrix} q_1 & q_3 & q_2 - 1 & q_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix}$
 - některé determinanty jsou zde nulové
- **0-determinant (ZD-strategie)**
 - rozdíl mezi u a v je prohození w_2 a w_4 (je to symetrická hra)
 - v se liší od u vektorem výher $\bar{w} = \begin{pmatrix} w_1 & w_3 & w_2 & w_4 \end{pmatrix}$
 - $u = \frac{|w|}{|1|}, \quad v = \frac{|\bar{w}|}{|1|}$ a $\begin{vmatrix} q_1 & \dots & q_4 & 1 & \dots & 4 \\ w_1 & \dots & w_4 & w_1 & \dots & w_4 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} q_1 & \dots & q_4 & 1 & \dots & 4 \\ w_1 & \dots & w_4 & w_4 & \dots & w_1 \end{vmatrix}$
 - jsou tzv. **vyděračské strategie**

6. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}}
\xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1}
\xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{#1}} \xdef\str{\wedge^*} \xdef\spv{\mc{V}} \xdef\civ{\mc{U}}
\xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv{x}} \xdef\yy{\vv{y}} $$
```

Pokračování

Počítali jsme stacionární vektor \mathbf{v} pro přechodovou matici A , tj. $A \mathbf{v} = \mathbf{v}$

Mějme počáteční pravděpodobnostní vektor \mathbf{x}_0 $\mathbf{x}_0 = \text{mtr} \{ p_0 \ q_0 \ | \ p_0(1 - q_0) \ | \ (1 - p_0) \ q_0 \ | \ (1 - p_0)(1 - q_0) \}$ A jistě $\mathbf{x}_1 = A \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 = A \mathbf{x}_1 = A^2 \mathbf{x}_0$

Navíc $w(\mathbf{x}_0 + \delta A \mathbf{x}_0 + \delta^2 A^2 \mathbf{x}_0 + \dots) = w(E + \delta A + \delta^2 A^2 + \dots) \mathbf{x}_0 = w \underbrace{(\overbrace{E - \delta A}^B)^{-1}}_{\mathbf{y}}$, což je tedy $\mathbf{y} = B^{-1} \mathbf{x}_0 \ B \mathbf{y} = \mathbf{x}_0 \ \mathbf{y} = \frac{|\cdot|}{|\cdot|}$

A tím pádem dostaneme opět lineární závislost výhry na parametru p_i .

Evoluční algoritmy

	A	B
A	1	2
B	0	1,5

A počítejme $\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{5}{3}$ $\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1,5 = 1$

		3
		2
↓		3/4

Úloha o dohodě

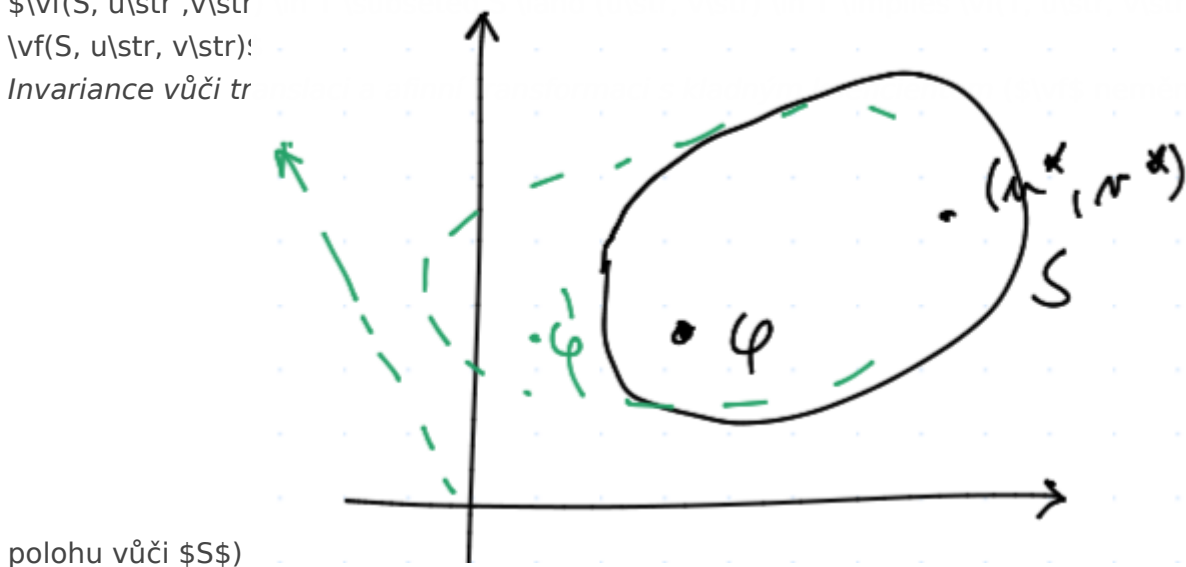
Nechť \mathcal{D} je množina všech úloh o dohodě (pouze hry 2 hráčů) s funkcí $v_f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Dále nechť *úloha* (S, u, v) , kde S je **konvexní a kompaktní podmnožina** v \mathbb{R}^2 a $(u, v) \in S$ je výchozí dvojice výher, která je dána tím, co si hráči zaručí - přičemž hledá optimální situaci

“ S je podmnožina, na které se mohou hráči "hýbat"

Požadavky na v_f

1. $\forall (S, u, v) \geq (u, v)$ (bavíme se pouze o výhrách - tzn. cca Paretovská optimalita)
2. $\forall (S, u, v, u) \in S$
3. $(u, v) \in S \wedge (u, v) \geq \forall (S, u, v) \implies (u, v) = \forall (S, u, v)$
4. $\forall (S, u, v) \implies \forall (S, u, v)$
5. Invariance vůči tr



6. S je symetrická vůči ose $x = y$ a $u = v \implies \forall (S, u, v)$ leží na $x = y$
7. $(u, v) \in T \subseteq S \implies \forall (T, u, v) \leq \forall (S, u, v)$

Lze ukázat, že taková funkce \forall splňující 1.-7. **neexistuje**

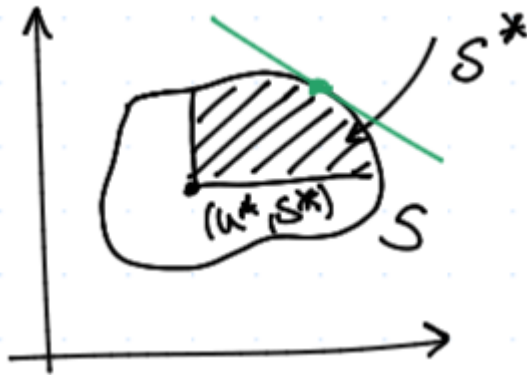
“ Podmínka 7. je velmi silná a pokazí nám to

Věta $\{D\{NASH\}$

Existuje právě jedno \forall splňující 1.-6..

Lemma $\{D\{L1\}$

Nechť $(\exists u, v \in S) \wedge u > u, v > v$, pak existuje jediné maximum funkce $g(u, v) = (u - u)(v - v)$ na množině $S_+ = \{(u, v) \in S \mid u \geq u, v \geq v\}$.



Důkaz

Jistě g je spojitá, S_+ je kompaktní. Lze předpokládat, že $(u^*, v^*) = (0,0)$ (posunutím do počátku). Mějme (u', v') , (u'', v'') maxima g .

Můžeme předpokládat, že $u' > u''$ a jistě i $v' < v''$. Potom $g\left(\frac{u' + u''}{2}, \frac{v' + v''}{2}\right) = \frac{(u' + u'')(v' + v'')}{4} = \frac{u'v' + u''v' + u'v'' + u''v''}{4} > g(u', v') = u'v' = u''v''$ Nerovnost odpovídá $u'v'' + u''v' > u'v' + u''v'' \iff (u' - u'')(v'' - v') > 0$, což ale jistě platí. Tedy jsme našli nové maximum, což je spor. \blacksquare

Lemma $D\{L2\}$

Za předpokladů $\text{tagDe}\{L1\}$ nechť $h(u,v) = (\bar{v} - v)u + (\bar{u} - u)v$, kde (\bar{u}, \bar{v}) je bod, ve kterém se realizuje maximum g z $\text{tagDe}\{L1\}$. Pak pro libovolné $(u,v) \in S$ platí $h(u,v) \leq h(\bar{u}, \bar{v})$.

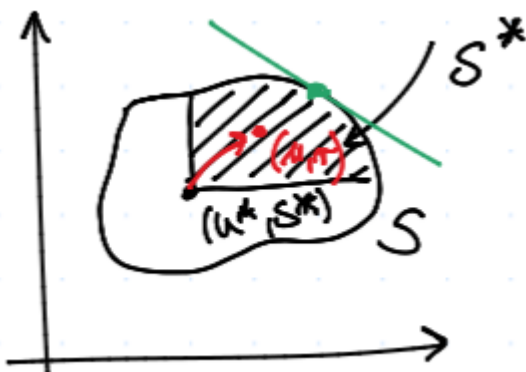
Důkaz

Sporem, nechť $h(u,v) > h(\bar{u}, \bar{v})$ pro nějaké $(u,v) \in S$. Nechť $\epsilon \in (0,1)$ a $(u', v') = (\bar{u}, \bar{v}) + \epsilon((u,v) - (\bar{u}, \bar{v}))$. Pak ale $h(u - \bar{u}, v - \bar{v}) = h(u,v) - h(\bar{u}, \bar{v}) > 0$. Nyní dosadíme $g(u', v') = (\bar{u} - \epsilon(u - \bar{u}))(\bar{v} - \epsilon(v - \bar{v})) - \epsilon(u - \bar{u})(\bar{v} - v) + (\bar{u} - u)(v - \bar{v}) + \epsilon^2(u - \bar{u})(v - \bar{v})$. A derivací podle ϵ $0 < \alpha + \beta \epsilon + \gamma \epsilon^2 \rightarrow \beta + 2\gamma \epsilon$, tedy s růstem ϵ roste derivace na vhodném $(0, \epsilon_0)$. Tedy g je rostoucí, což je spor s $\text{tagDe}\{L1\}$.

Důkaz $\text{tagDe}\{NASH\}$

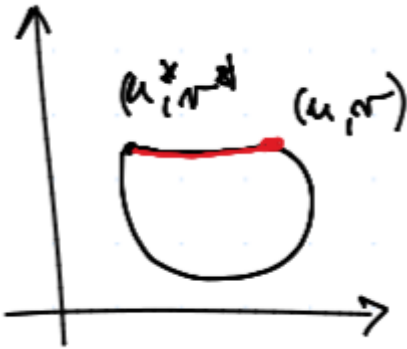
Nastane právě jedna z možností

1. existuje $(u,v) \in S$ takové, že $u > u^*, v > v^*$



Potom vezmeme (\bar{u}, \bar{v}) z $\text{tagDe}\{L1\}$.

2. Neplatí 1., ale existuje $(u, v) \in S$ takové, že $u > u^*$ (a $v = v^*$)



V tomto případě vezmeme $\bar{v} = v^*$ a s \bar{u} jdeme na maximum $(u \in S)$

3. Neplatí 1., ale existuje $(u, v) \in S$ takové, že $v > v^*$ (a $u = u^*$)

$\text{\hspace{3cm}}ANALOGICKY$

4. Neplatí nic, z 1. - 3., tzn. $\bar{u} = u^*$ a $\bar{v} = v^*$. \blacksquare

Příklad

Mějme bimaticovou hru

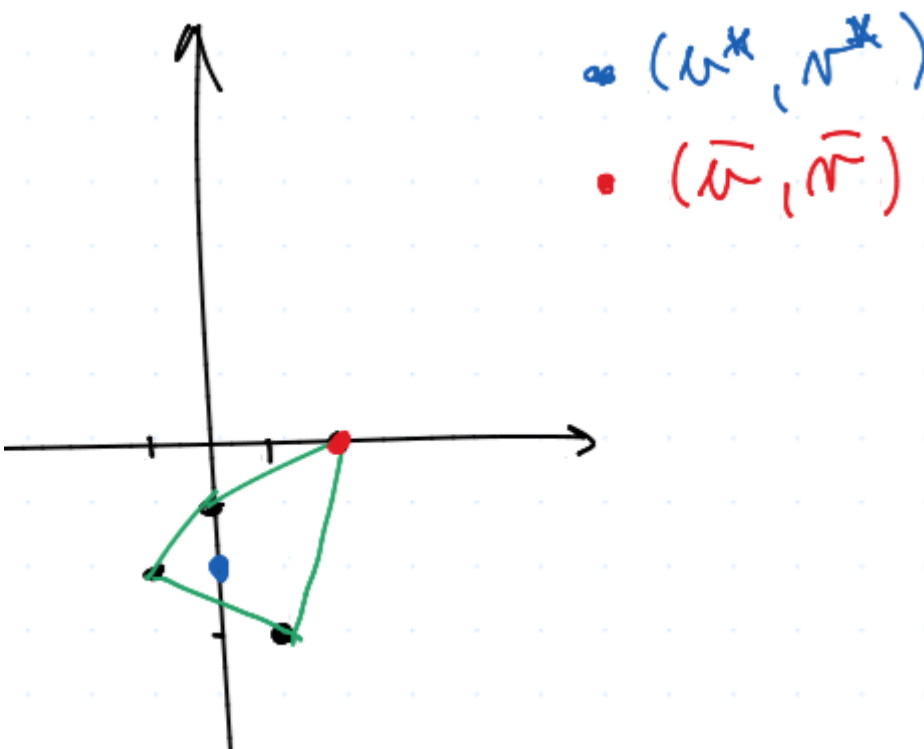
- student

$$A = \begin{matrix} \text{učí} & \text{neučí} \\ \hline \text{dá} & \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \\ \text{nedá} & \end{matrix}$$

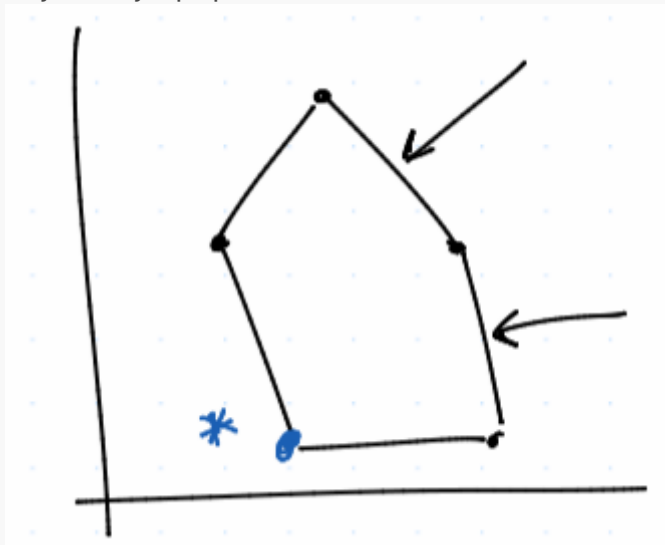
- učitel

$$B = \begin{matrix} 0 & -2 \\ -3 & -1 \end{matrix}$$

U bimaticových her je S konvexní obal všech situací a bodů z dolních hodnot



Zajímavější případ



7. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{(\text{#1})}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}}
\xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1}
\xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{[#1]}} \xdef\str{\^*} \xdef\spv{\mc{V}} \xdef\civ{\mc{U}}
\xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv{x}} \xdef\yy{\vv{y}} $$
```

Teorie užitečnosti

Nechť \mathcal{U} je množina událostí, která je seřazená podle toho, jak jsou pro nás užitečné.

Množinu \mathcal{U} rozšíříme o konvexní kombinace $r_1 A_1 + \dots + r_n A_n$, kde $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$ a $r_1, \dots, r_n \geq 0$ s $r_1 + \dots + r_n = 1$.

Relace $A \prec B$ znamená, že B upřednostňuji před A . $A \parallel B$ znamená, že žádnou událost neupřednostňuji.

Axiomy teorie užitečnosti $\mathcal{D}\{\text{AXT}\}$

- $\forall A, B$ nastane právě jedna možnost $A \succ B, A \prec B, A \parallel B$
- \prec je relace ekvivalence
- \prec je tranzitivní
- $A \prec B \parallel C \implies A \prec C$ a $A \parallel B \prec C \implies A \prec C$
- $1 \cdot A + 0 \cdot B = A$

- $(T6)$: $r_1 A_1 + \dots + r_n A_n = r_{\sigma_1} A_{\sigma_1} + \dots + r_{\sigma_n} A_{\sigma_n}$ pro libovolnou permutaci $\sigma \in S(n)$
- $(T7)$: $rA + (1-r)(sB + (1-s)C) = rA + (1-r)sB + (1-r)(1-s)C$
- $(T8)$: $rA + (1-r)A = A$
- $(T9)$: $A \parallel C$ a vezmeme $r \in [0,1]$, $B \in \mathcal{U} \implies rA + (1-r)B \parallel rC + (1-r)B$
- $(T10)$: $A \prec C$, $r > 0$, $B \in \mathcal{U} \implies rA + (1-r)B \prec rC + (1-r)B$
- $(T11)$: $A \prec B \prec C \implies \exists r \in [0,1] : rA + (1-r)C \parallel B$

Věta $(DTEU)$

Existuje $u : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že pro $\forall A, B \in \mathcal{U}$, $r \in [0,1]$: $u(A) < u(B) \iff A \prec B$ a navíc platí

- $u(rA + (1-r)B) = ru(A) + (1-r)u(B)$
- je-li v jiná taková funkce, pak platí $\forall A \in \mathcal{U} : v(A) = \alpha u(A) + \beta$, kde $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$

Lemma $(DTUL)$

Pokud $B \prec A$ a máme $0 \leq s \leq r \leq 1$, pak

1. $sA + (1-s)B \preceq rA + (1-r)B$
2. $B \prec C \prec A$, $r \in (0,1) : rA + (1-r)B \parallel C$, pak r je určeno jednoznačně

Důkaz (\tag{DTUL})

1. $sA + (1-s) \left(\frac{r-s}{1-s} A + \frac{1-r}{1-s} B \right) = \frac{r-s}{1-s} A + (1-r) B = \frac{r-s}{1-s} rA + \frac{1-r}{1-s} B \preceq \frac{r-s}{1-s} A + \frac{1-r}{1-s} B$ a podle $(T8)$ platí $B = \frac{r-s}{1-s} B + \frac{1-r}{1-s} B \preceq \frac{r-s}{1-s} A + \frac{1-r}{1-s} B$ a celkem podle $(T10)$ dostáváme $rA + (1-r)B \preceq sA + (1-s)B$
2. Mějme r, s a $rA + (1-r)B \parallel sA + (1-s)B$, což je spor s $(DTUL)/1$ a navíc
 - $r = 0 \implies B \parallel C$ spor
 - $r = 1 \implies A \parallel C$ spor

Důkaz (\tag{TEU})

Vezměme události $E, F \in \mathcal{U}$, $E \prec F$. Uvážíme $A \in \mathcal{U}$, pak nastane některá z možností

- $F \prec A$
- $F \parallel A$
- $E \prec A \prec F$

- $E \parallel A$
- $A \prec E$

“ Kdyby takové E, F neexistovalo, pak $E \parallel F$ a pro libovolná E, F a mohli bychom volit $u \equiv 0$

Klademe respektive podle možností výše $u(A) = \frac{1}{r}, 1, s, 0, \frac{t-1}{t}$, kde

- $(1-s)E + sF \parallel A$
- $rA + (1-r)E \parallel F$
- $tA + (1-t)F \parallel E$

Nyní zvolíme $B \in \mathcal{U}$ a vyšetříme 25 možností pozice A, B vůči E, F , např. $E \prec A, B \prec F$

Pak $(1-s_1)E + s_1F \parallel A \parallel (1-s_2)E + s_2F \parallel B$ a tedy $u(A) = s_1$ a $u(B) = s_2$. Předpokládejme $s_1 = s_2$, pak podle vztahu výše a $\tag{U2}$, tj. $A \parallel B$. Nyní předp. $s_1 < s_2$, pak z \tag{D} dostáváme $A \prec B$. Naopak z $s_1 > s_2$ plyne $A \succ B$.

Hry ve tvaru charakteristické funkce

“ Hráči jsou poslanci a mají vytvořit vládní koalici - Snaha hráče je vždy dostat se koalice, která má šanci vyhrát

Mějme výherní funkci $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$, kde $N = \{1, \dots, n\}$ je množina všech hráčů a 2^N je **množina všech koalic** ($\mathcal{P}(N)$) a tedy pro $S \subseteq N, v(S) \in \mathbb{R}$

Požadujeme

1. $v(\emptyset) = 0$ **personálnost**
2. $S, T \subseteq N, S \cap T = \emptyset \implies v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ **superaditivita**
3. **Rozdělení** $x \in \mathbb{R}^N$
 1. $x_1 + \dots + x_n = v(N)$
 2. $x_i \geq v(\{i\})$

Množinu všech rozdělení hry v označme $E(v)$
4. **Podstata** $\sum_{i \in N} v(\{i\}) < v(N)$

5. Značme

$x \preceq_S y$, což čteme jako: rozdělení x je dominované rozdělením y pro koalici S

$$1. \quad (\forall i \in S): x_i < y_i \quad \text{and} \quad \sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$$

Navíc píšeme $x \preceq y$, pokud existuje koalice S tak, že $x \preceq_S y$

6. **jádro** - Množina všech nedominovaných rozdělení, značíme $C(v)$.

Lze ukázat, že jádro je složeno z rozdělení, kde každá koalice dostane alespoň tolik, kolik si sama zaručí, tj. $x \in C(v) \iff (\forall S \subseteq N): \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$

Příklad

Mějme $N = \{1, 2, \dots, 2k = n\}$, přičemž lichý hráč má levou botu a pravý hráč má pravou botu - výhra $v(S)$ koalice S je pak počet funkčních párů bot, co jsou schopni dát dohromady

- $v(\{i\}) = 0$
- $v(\{1, 2\}) = 1$
- $v(\{1, 2, 3\}) = 1$
- $v(\{1, 3\}) = 0$

Jelikož $v(\{2m-1, 2m\}) = 1$, pak $v(N) = \sum_{m=1}^k v(\{2m-1, 2m\})$, tedy jistě pro libovolné x musí platit $x_{2m-1} + x_{2m} = 1$

Navíc i pro čtveřice musí platit $x_1 + x_4 = 1 \wedge x_2 + x_3 = 1$

Celkem tedy mám soustavu $x_1 + x_2 \wedge x_1 + x_4 = 1 \wedge x_2 + x_3 = 1 \wedge x_3 + x_4 = 1 \implies x_1 = x_3 \wedge x_2 = x_4$

A proto $x \in C(v) \iff x = (a, 1-a, a, 1-a, \dots)$

8. přednáška

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef\tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}}
\xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1}
\xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{[#1]}} \xdef\str{\^*} \xdef\spv{\mc{V}} \xdef\civ{\mc{U}}
\xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv{x}} \xdef\yy{\vv{y}} $$
```

Pokračování her ve tvaru charakteristické funkce

Věta $\mathcal{D}\{KER\}$

Pro libovolnou hru v platí $\mathcal{C}(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall S \subseteq N) \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}$, kde $\mathcal{C}(v)$ je **jádro**.

Definice ($\mathcal{D}\{NM\}$ -řešení)

Označme $V \subseteq E(v)$ s vlastnostmi

- $x, y \in V \implies x \not\prec y$
- $x \in E(v) \setminus V \implies \exists y \in V : x \prec y$

Pak V nazveme **NM-řešením**. Pod $E(v)$ myslíme množinu rozdělení.

Je to jistým způsobem alternativa k jádru

Hru nazveme **symetrickou**, pokud $v(S)$ je funkcí $|S|$.

Příklad

Mějme 3 hráče, 2 se domluví a 3. hráč jim musí zaplatit korunu každému. Jistě $v(\emptyset) = 0$ a $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = -2$ Také $v(\{1,2\}) = \dots = 2$ a jako poslední $v(\{1,2,3\}) = 0$

Počítejme pro $C(v)$: $x_1 + x_2 \geq 2 \wedge x_1 + x_3 \geq 2 \wedge x_2 + x_3 \geq 2$ celkem $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 6 \wedge x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$, ale $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, což je spor, tedy je jádro prázdné.

Naopak NM-řešeními jsou $\{(1, 1, -2), (1, -2, 1), (-2, 1, 1)\}$ Zkontroluje **ne**-dominování mezi situacemi, např. $(1, 1, -2) \not\prec (1, -2, 1)$

“ Zde při dominování si musí polepšit všichni hráči

Toto můžeme splnit koalicí SS , ale ta podle pigeon-hole principle nemůže být 2 ani 3 prvková, stejně přijdeme na to, že si 1 prvková koalice nic nezaručuje, tedy ani ona nebude fungovat. Tedy se tyto strategie nedominují.

Ověřme nyní druhou podmínku $(x,y,z) \notin V$, **BÚNO** předpokládejme $x \leq y \leq z$, přičemž jistě $x = 2 - y - z$. Pak pro

- $y > 1$, pak ale $y + z > 2$, tedy $x < -2$, ale potom $(x,y,z) \notin E(v)$ (stejná situace nastane pro $y = 1$ a $z > y$)
- $y = z = 1 \implies x = -2 \implies (x,y,z) \in V$
- $y < 1, z < 1$, pak ale $(x,y,z) \prec (-2, 1, 1)$
- $y < 1, z \geq 1$, pak tuto situaci dominuje $(1,1, -2)$

Shapleyho vektor

Vezměme V - všechny hry ve tvaru charakteristické funkce (n hráči) - a chceme funkci $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$

Máme několik požadavků na takovou funkci (na **Shapleyho vektor**)

- $\varphi_i(\pi v) = \varphi_{\pi^{-1}(i)}(v)$, kde πv je hra vzniklá permutací π na množině hráčů
- $\varphi_i(u + v) = \varphi_i(u) + \varphi_i(v)$, kde platí $(u + v)(S) = u(S) + v(S)$

3. $\alpha > 0 : \forall_i (\alpha v) = \alpha \forall_i (v)$, $\tag{T{S3}}$ kde $(\alpha v)(S) = \alpha v(S)$
4. Pokud $S \subseteq N$ obsahuje všechny podstatné hráče, pak $v(S) = \sum_{i \in S} \forall_i (v)$, kde i nazveme **podstatným hráčem**, pokud $\exists S \subseteq N, i \notin S : v(S, \{i\}) > v(S) + v(\{i\})$ $\tag{T{S4}}$

$\sum_{i \in N} \forall_i (v) = v(N)$ Je-li i -tý hráč **nepodstatný**, pak $\forall_i (v) = v(\{i\})$

Věta $\tag{D{Shapleyho}}$

Existuje jediná funkce $v : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ splňující axiomy $\tag{S1}$ - $\tag{S4}$ uvedené výše a to $\forall_i (v) = \sum_{i \in T \subseteq N} \frac{(|T| - 1)! (n - |T|)!}{n!} \text{Big}(v(T) - v(T - \{i\}))$

Lemma $\tag{LS1}$

Nechť w_S je hra $w_S(T) = \begin{cases} 1, & S \subseteq T \setminus \emptyset, \\ \text{jinak}, & \end{cases}$ pak platí $\forall_i (w_S) = \begin{cases} \frac{1}{|S|}, & i \in S \setminus \emptyset, \\ 0, & i \notin S \end{cases}$

Důkaz $\tag{De{LS1}}$

Hráč je podstatný $\iff i \in S$. Proto $\implies \sum_{i \in S} \forall_i (w_S) = 1$ Pripustíme $\forall_i (w_S) \neq \forall_j (w_S), i, j \in S$. Zvolíme $\pi = (i, j)$, což ale dává spor s $\tag{S1}$.

Lemma $\tag{LS2}$

Nechť $v \in V$ a $\emptyset \neq S \subseteq N$ a definujeme $c_S = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} v(T)$, kde $s = |S|, t = |T|$. Potom $v = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} c_S w_S$

Důkaz $\tag{De{LS2}}$

Zvolme koalici $\emptyset \neq U \subseteq N$ a $\sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} c_S w_S(U) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} \sum_{\emptyset \neq T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} v(T) w_S(U)$

Jelikož $w_S(U) = 1 \iff S \subseteq U$, pak $= \sum_{\emptyset \neq T \subseteq U} \sum_{T \subseteq S \subseteq U} (-1)^{|S|-|T|} v(T) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq U} \left(\sum_{s=T}^{|U|} \binom{|U|-t}{s-t} (-1)^{|S|-|T|} \right) v(T) = \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{|U|-t} \binom{|U|-t}{i} (-1)^i \right)}_{(1-1)^{|U|-t} = 0 \text{ pro } t \leq |U|, 1 \text{ jinak}} v(T) \blacksquare$

“ Lemma $\tag{De{LS2}}$ dává jednoznačnost z $\tag{De{Shapleyho}}$ věty.

Důkaz $\tag{De{Shapleyho}}$ věty

Počítejme
$$\varphi_i(v) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} c_S \varphi_i(w_S) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} c_S \frac{1}{s} = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} \frac{1}{s} \sum_{T \subseteq S} (-1)^{s-t} v(T) = \sum_{T \subseteq S} \sum_{T \subseteq S} \frac{(-1)^{s-t}}{s} v(T) = \sum_{i \in T} \gamma_i(T) (v(T) - v(T \setminus \{i\})),$$
 kde
$$\gamma_i(T) = \sum_{T \cup \{i\} \subseteq S \subseteq N} \frac{(-1)^{s-t}}{s}$$

Počítejme
$$\gamma_i(T) = \sum_{s=t}^n \frac{(-1)^{s-t}}{s} \binom{n-t}{s-t} = \sum_{s=t}^n \frac{(-1)^{s-t}}{s} \binom{n-t}{s-t} \int_0^1 x^{s-1} dx = \int_0^1 x^{t-1} \underbrace{\left(\sum_{s=t}^n (-1)^{s-t} \binom{n-t}{s-t} x^{s-t} \right)}_{\sum_{j=0}^{n-t} (-1)^j \binom{n-t}{j} x^j = (1-x)^{n-t}} dx = \int_0^1 x^{t-1} (1-x)^{n-t} dx = \text{per partes} \dots = \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}$$

“
$$\int_0^1 x^{t-1} (1-x)^{n-t} dx = \frac{1}{n+1} x^t (1-x)^{n-t} - \int_0^1 \frac{1}{n+1} t x^t (-1) (1-x)^{n-t-1} dx = \frac{1}{n+1} t \left(x^t (1-x)^{n-t} + \int_0^1 x^t (1-x)^{n-t-1} dx \right)$$

“ Shapleyho vektor se **nemusí** nacházet v jádře

Pokračování příkladu s NM-řešením

$$\varphi_1(v) = \sum_{1 \in T \subseteq N} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} (v(T) - v(T \setminus \{1\})) = \frac{0! 2!}{3!} (-2) + 2 \cdot \frac{1! 1!}{3!} (2 - (-2)) + \frac{2! 0!}{3!} (0 - 2) = \frac{1}{3!} (-4 + 8 - 4) = 0$$

Teorie sociálního výběru

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1} {\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{(\text{#1})}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}}
\xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1 \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1 \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1
\xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1 \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial}, #1 \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1 \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1 \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1
\xdef\iter#1{\wedge^{[#1]}} \xdef\str{\wedge^*} \xdef\spv{\mc{V}} \xdef\civ{\mc{U}}
\xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv{x}} \xdef\yy{\vv{y}} $$
```

Teorie sociálního výběru - teorie her o volebních systémech

Příklad

Máme 15 zaměstnanců - ti si chtějí zvolit nového šéfa - a 3 kandidáty A, B, C Potom preferenční uspořádání jsou

- 7 zaměstnanců: $A > B > C$
- 7 zaměstnanců: $B > A > C$
- 1 zaměstnanec: $C > A > B$

Přehled bodů:

# people	A	B	C
7	2	1	0
7	1	2	0
1	1	0	2

Celkem má \$A\$ 22 bodů, \$21\$ bodů pro \$B\$ a \$2\$ pro \$C\$

Pokud by ale těch 7 zaměstnanců s 1. \$B\$ chtělo uškodit \$A\$, mohou si změnit preference na $B > C > A$

To stejné mohou udělat i ti s 1. \$A\$. Potom preferenční uspořádání jsou

- 7 zaměstnanců: $A > C > B$
- 7 zaměstnanců: $B > C > A$
- 1 zaměstnanec: $C > A > B$

Přehled bodů:

# people	A	B	C
7	2	0	1
7	0	2	1
1	1	0	2

Celkem má \$A\$ 15 bodů, \$14\$ bodů pro \$B\$ a \$16\$ pro \$C\$

Označme

- \$N\$ voliče
- \$i\$-tici uspořádání $(\prec_i)_{i \in N}$ nazývanou **preferenční uspořádání** na množině \$A\$
- \$A\$ množinu variant

Preferenční schéma $p : N \rightarrow S_m, \text{quad } |A| = m$, kde S_m je permutace množiny \$A\$

Dále označme \$P\$ množinu všech preferenčních schémat (pro pevné \$N, A\$).

Náš cíl je najít pevné $d : P \rightarrow S_m$, kde d nazýváme **funkcí sociálního rozhodování** $d((\prec_i)_{i \in N}) = \prec$ a požadujeme

1.

$$(\forall (\prec_i)_{i \in N} \in P) (\forall a, b \in A) (\forall i \in N) \text{quad } a \prec_i b \implies a \prec b$$
$$\tag{T\{FSR-1\}}$$

2.

$$(\forall (\prec_i)_{i \in N}, (\prec_{\prec_i})_{i \in N} \in P) (\forall a, b \in A) \text{quad } \{i \mid a \prec_i b\} = \{i \mid a_{\prec_i} \prec_{\prec_i} b\} \implies (a \prec b \text{ iff } a \prec_{\prec} b)$$
$$\tag{T\{FSR-2\}}$$

Definice $D\{Dikt\}$

Dále $j \in N$ nazveme **diktátorem**, pokud $d((\prec_i)_{i \in N}) = \prec_j$

Věta $\mathcal{D}\{\text{Arrow}\}$

Nechť $n \geq 2$, $n \geq 3$. Pak libovolná funkce soc. rozhodování má diktátora.

Příklad

1. $m = 2$, $n \geq 2$, např. většinové pravidlo

$$\{I \subseteq N \mid (\forall i \in I) a \leq_i b \mid (\forall j \in N \setminus I) b \leq_j a\}$$

Je-li $|I| > \frac{n}{2} \implies a < b$ (a opačně). Při n sudém dáme na "čestného předsedu"

2. $m = 2$, $n = 2$, možnosti

$$a \leq_1 b, a \leq_2 b \quad \implies a < b \quad a \leq_1 b, b \leq_2 a \quad \implies a <$$

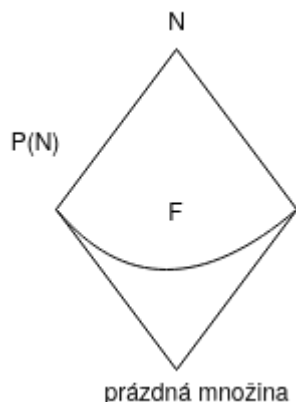
$$b, \overbrace{b < a}^{\text{2. diktátor}}, \overbrace{a < b}^{\text{1. diktátor}}, b <$$

$$a, \underbrace{b < a}_{\text{2. diktátor}}, \underbrace{b < a}_{\text{1. diktátor}}, b < a \mid b \leq_1 a, b \leq_2 a \quad \implies b < a$$

Definice $\mathcal{D}\{\text{Filtr}\}$

Řekneme, že \mathcal{F} je filtr na množině N , pokud

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- $F, G \in \mathcal{F} \implies F \cap G \in \mathcal{F}$
- $F \in \mathcal{F}, F \subseteq G \implies G \in \mathcal{F}$



Dále definujeme **hlavní filtr** $\mathcal{F} \uparrow_A = \{F \subseteq N \mid a \in F\}$ a **ultrafiltr** - maximální filtr, tj. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq P(N) \implies \mathcal{G} = \mathcal{F}$

Lemma $\mathcal{D}\{L1\}$

Filtr \mathcal{F} na N je **ultrafiltr** $\iff \forall F \subseteq N \text{ je } F \in \mathcal{F} \text{ nebo } N \setminus F \in \mathcal{F}$

Důkaz $\tag{L1}$

Pokud by $F \notin \mathcal{F}$ a ani $N \setminus F \notin \mathcal{F}$, pak generujeme $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \mathcal{F} \uparrow_F$

Nyní je třeba ukázat, že $\emptyset \notin \mathcal{G}$. Kdyby ano, pak by muselo platit $\emptyset = F \cap G$ pro $G \in \mathcal{F}$, pak $G \subseteq N \setminus F$, což je spor s $N \setminus F \notin \mathcal{F}$.

Lemma $\mathcal{D}\{L2\}$

Pro libovolnou konečnou množinu N je každý ultrafiltr hlavní.

Podmnožina $F \subseteq N$ **přehrává** F' , typicky $F' = N \setminus F$, ve dvojici $a, b \in A$, platí-li $a \leq_F b$, $a \leq_{F'} b \implies a < b$, kde pod $a \leq_F b$ myslíme $(\forall i \in F) \quad a \leq_i b$

Lemma $\mathcal{D}\{L3\}$

Pokud F přehrává $F' = N \setminus F$ pro $d \in a, b$ a x, y jsou libovolné $x, y \in A \implies F$ přehrává F' i v x, y

“ Tedy pokud umí vynutit $a < b$ pro nějakou dvojici, umí to pro všechny dvojice

Důkaz $\text{tagDe}\{L3\}$

Uvažujme $c \leq_F a \leq_F b$ a také $b \leq_{F'} c \leq_{F'} a$ (preferenční schéma musí být připravené pro všechny situace).

Pak ale podle $\text{tagEq}\{FSR-1\}$ musí být $c < a$, ale také $a < b$ podle předpokladů. Celkem máme, že $c < a < b$.

Nyní vezměme libovolná $c \leq_F, \leq_{F'}$ splňující $c \leq_F b, b \leq_F c$, pak dostaneme $c < b$, protože výsledek d nezávisí na a podle $\text{tagEq}\{FSR-2\}$. Jinak řečeno F přehrává F' i v c, b .

Duálně nahradíme b nějakým e a stejně se dostaneme k x, y

Zde F nazveme **rozhodující (vládnoucí) rodina** pro d

Lemma $\mathcal{D}\{L4\}$

Pro $n \geq 2, m \geq 3$ je množina všech vládnoucích rodin **ultrafiltr** na N

Důkaz $\text{tagDe}\{L4\}$

Nechť F je vládnoucí rodina a platí $F \subseteq G \subseteq N \implies G$ je vládnoucí rodina. Mějme $a, b, c \in A$ s $F \subseteq G \subseteq N$ a požadujeme

1. $a \leq_{N-G} c \leq_{N-G} b$

2. $a \leq_{G-F} b \leq_{G-F} c$
3. $b \leq_F a \leq_F c$

Z $\text{tagEq}\{\text{FSR-1}\}$ víme, že $a < c$. Navíc G přehrává G' v b, c a také F je vládnoucí rodina a 3. víme, že $b < a < c$.

Celkem tedy G přehrává G' v b, c a tedy G je vládnoucí.

Dokažme, že F je **ultrafiltr** a tedy $\emptyset \neq F \subseteq N \implies F \text{ nebo } F' \text{ je vl. rodina}$, tj. $b \leq_{F'} a, a \leq_F b$, pak

- $a < b \implies F$ je vl.
- $b < a \implies F'$ je vl.

Ukažme nyní uzavřenost na průniky. Nechť $\emptyset \neq F, G \subseteq N$ a F, G vládnoucí $\implies F \cap G$ vládnoucí. Vezměme nyní $b \leq_{N \setminus (F \cup G)} c \leq_{N \setminus (F \cup G)} a \leq_{F \setminus G} a \leq_{F \setminus G} c \leq_{G \setminus F} b \leq_{G \setminus F} a \leq_{F \cap G} c \leq_{F \cap G} b$, $\$$ z čehož dohromady víme z

- $F = (F \cap G) \cup (F \setminus G)$, že $a < c$
- $G = (F \cap G) \cup (G \setminus F)$, že $c < b$

Celkem $a < c < b \implies a < b$, tedy $F \cap G$ je vládnoucí pro a, b

Důkaz $\text{tagDe}\{\text{Arrow}\}$

Jelikož $\text{mcal } F = \uparrow_j \implies \{j\}$ je vládnoucí a tedy j je **diktátor**.

Hry v rozšířené formě (poziční hry)

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\lVert #1 \right\rVert}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\AND{\quad \and \quad} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix}#1\end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}}
\xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1}
\xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{#1}} \xdef\str{\^*} \xdef\spv{\mc V} \xdef\civ{\mc U}
\xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv x} \xdef\yy{\vv y} $$
```

“ Také lze nazývat *tahové hry*

Definice $\mathcal{D}\{H, V, R, F\}$

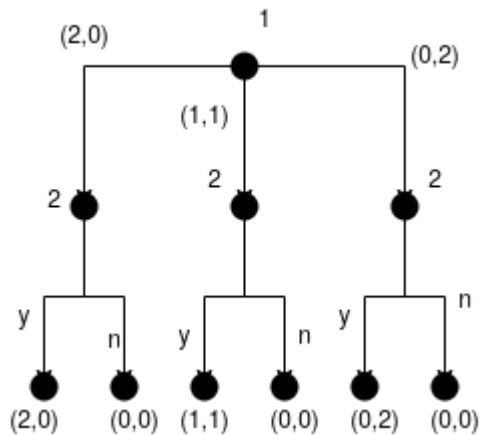
Nechť N je množina hráčů, H množina **historií**

- prázdná posloupnost $\ve \in H$
- $(a^k)_k$ je historie $\implies (a^k)_k$ je historie
- máme-li $(a^k)_k$ a víme, že $\forall L < \infty : (a^k)_k$ je historie, pak i $(a^k)_k$ je historie

Dále nechť P je **tahová funkce**, $P : H \rightarrow N$ (nebo také $P : H \rightarrow \mathcal{P}(N)$), kde $H = H - Z$, Z jsou **terminální historie**, což jsou maximální posloupnosti v H (ty, které neumíme dále rozšířit).

Pak výherní funkce má tvar $u_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$ nebo může být zadáno pouze preferenční uspořádání \succsim_i na Z

Příklad



Zde $N = \{1, 2\}$, $P(i) = 1$ a $P((0,2)) = P((1,1)) = P((2,0)) = 2$ a také $u_1((1,1), y) = 1$. Množina historí má tvar $H = \{i, (2,0), (1,1), (0,2), ((2,0), y), ((2,0), n), \dots\}$

Strategie pro prvního hráče $X = \{(2,0), (1,1), (0,2)\}$ a pro druhého hráče $Y = \{(2,0), y, (2,0), n, \dots\}$

Obecně zapsáno strategie pro i -tého hráče je množina $X_i = \{f : \bar{H} \rightarrow H \mid \bar{H} = \{\bar{h} \in H \mid P(\bar{h}) = i\}, \bar{h} \text{ je podposloupnost } f(\bar{h}) \text{ bez posledního členu}\}$

Nashova rovnováha:

Máme výherní funkci $u_i(\bar{f}_i, f_{-i}) \geq u_i(f_i, f_{-i})$, tj. i volí nejlepší odpověď na f_{-i} . Pak $(\bar{f}_i)_{i \in N}$ je rovnováha.

Dále definujeme podhru hry $(N, H, P, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ jako $(N, H \mid_h, P \mid_h, (X_i \mid_h)_{i \in N}, (u_i \mid_h)_{i \in N})$, kde $h \in H$ pevná historie a $h' \in H \mid_h$ iff $(h, h') \in H$. Dále

- $P \mid_h(h') = P(h, h')$
- $f' \in X_i \mid_h$ iff $(\exists f \in X_i) (\forall \bar{h} \in \bar{H} \mid_h) (h, f'(\bar{h})) = f(h, \bar{h})$
- $u_i \mid_h(h') = u_i(h, h')$

Situace $(f_i)_{i \in N}$ je **perfektní podherní rovnováha (PPR)**, je-li takto zvolené $(f_i \mid_h)_{i \in N}$ (Nashovou) rovnováhou pro každou historii h .

Pokračování příkladu

Rovnováha $\left((1,1), \begin{pmatrix} (2,0) \mapsto ((2,0), n) \\ (1,1) \mapsto ((1,1), y) \\ (0,2) \mapsto ((0,2), n) \end{pmatrix} \right)$, což ale **není perfektní podherní rovnováha**, neboť se

zde $(0,2) \mapsto ((0,2), n)$ rozhodl špatně, jinak řečeno $H \mid_h \sqsubset u_2((0,2), n) < u_2((0,2), y)$

Tedy **perfektní podherní rovnováha** je v tomto případě $\left((1,1), \begin{matrix} (2,0) \\ (2,0), n \end{matrix} \mapsto (1,1) \mapsto (1,1), y \mapsto (0,2) \mapsto (0,2), y \end{matrix} \right)$, ale také $\left((1,1), \begin{matrix} (2,0) \\ (2,0), y \end{matrix} \mapsto (1,1) \mapsto (1,1), y \mapsto (0,2) \mapsto (0,2), y \end{matrix} \right)$

Lemma $\mathcal{D}\{L1\}$

Nechť $G = (N, H, P, \bigcup X, \bigcup U)$ je hra v rozšířené formě s konečným horizontem (všechny historie jsou konečné). Pak situace $(f_i)_{i \in N}$ je **PPR** $\iff \forall i \in N, \forall h \in H, \forall P(h) = i \implies u_i((f_i \mid h)_{i \in N}) \geq u_i(\tilde{f}_i, (f_j \mid h)_{j \in \hat{i}})$, kde $\tilde{f}_i \in H \mid h$ se liší od $f_i \mid h$ pouze akcemi po h

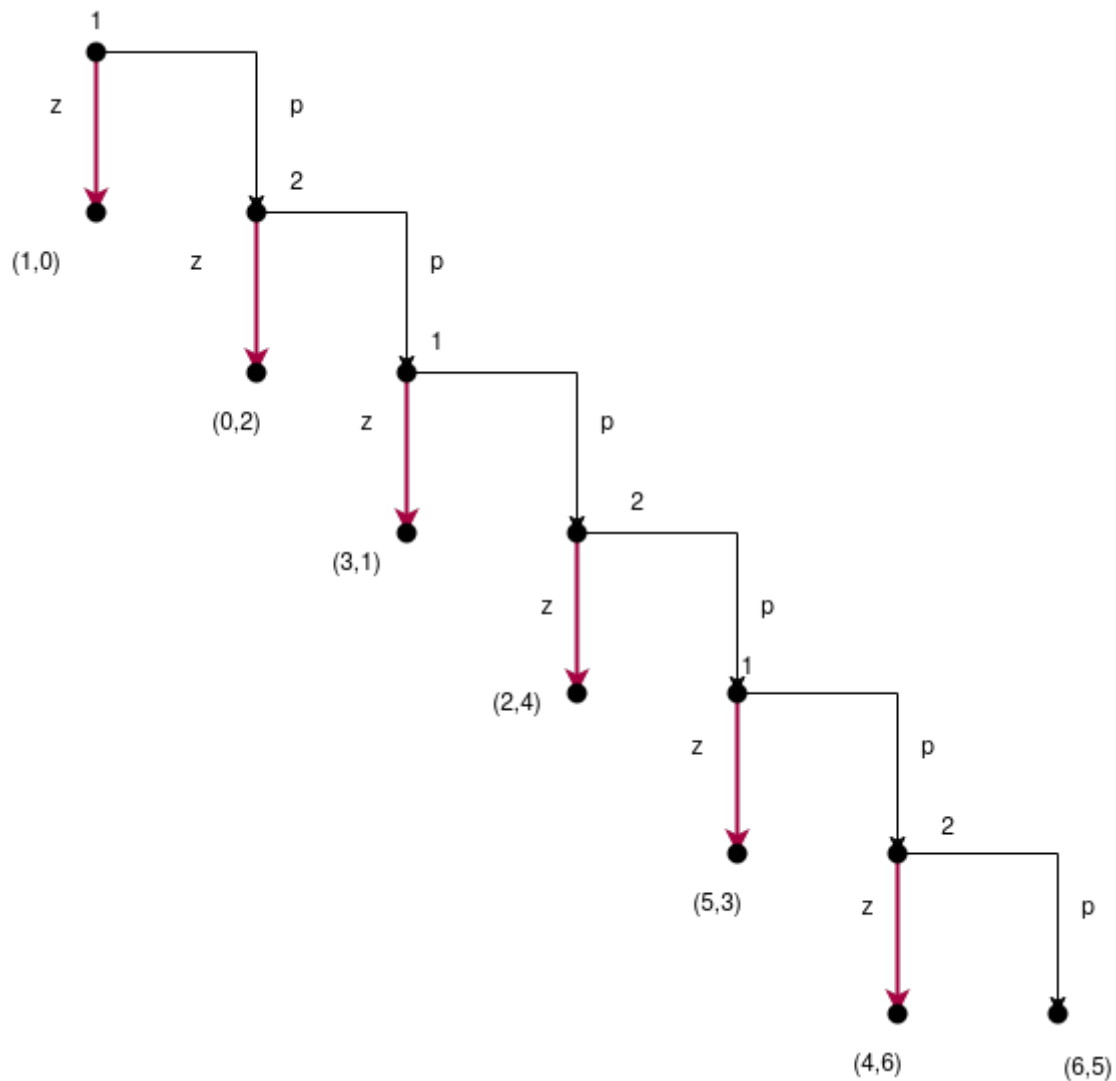
Věta $\mathcal{D}\{V1\}$

Je-li $G = (N, H, P, \{x_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$ konečná hra v rozšířené formě (tj. má konečný horizont a v každém vrcholu se rozhodujeme z konečně mnoha variant, tj. H je konečná), pak existuje **PPR***.

Dále tuto tematiku rozšiřují tzv. folkové věty.

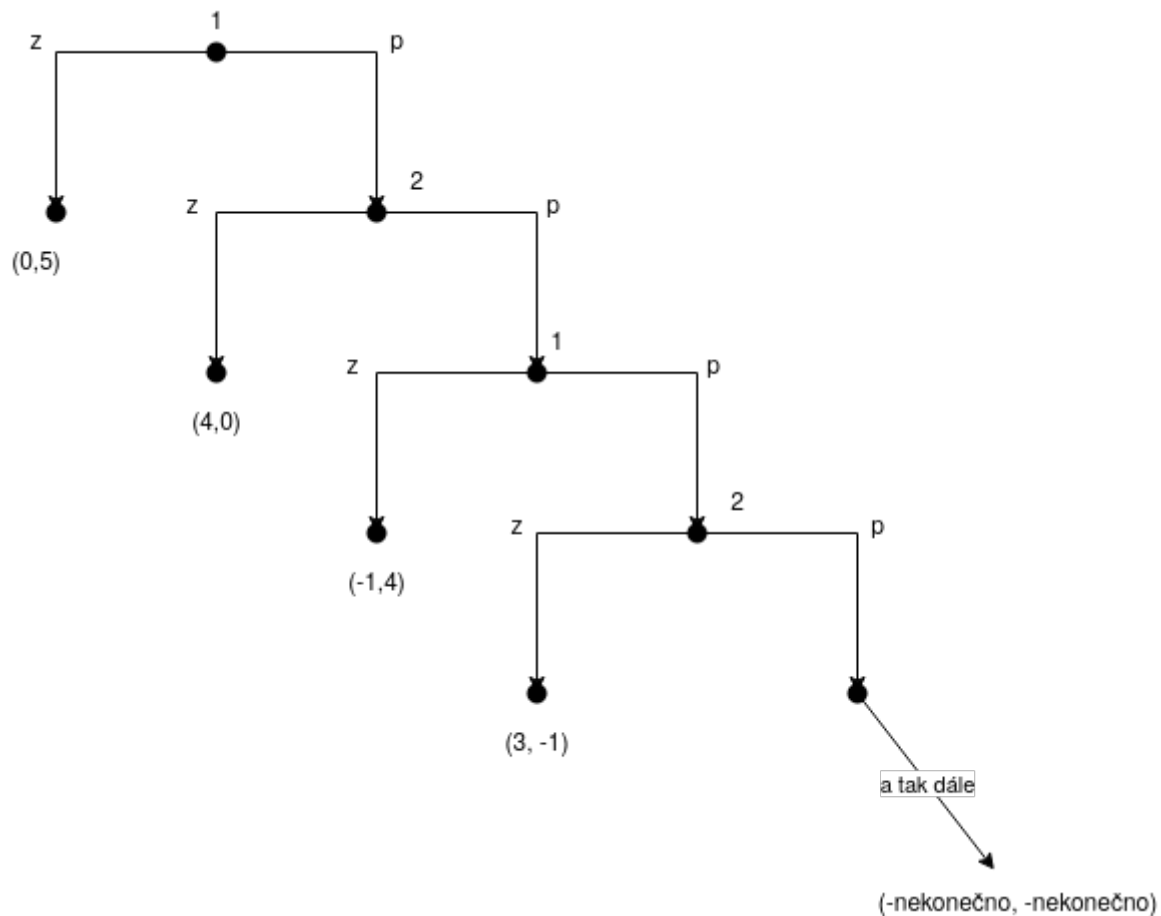
Příklad: Stonožka

Máme 2 hráče $N = \{1, 2\}$



A $f_1 = \begin{pmatrix} \vee & \mapsto (z) & \mapsto (p,p) & \mapsto (p,p,z) & \mapsto (p,p,p,p) & \mapsto (p,p,p,p,z) \\ \end{pmatrix}$ a $f_2 = (\dots)$ analogicky.

Příklad: Dražba s placením



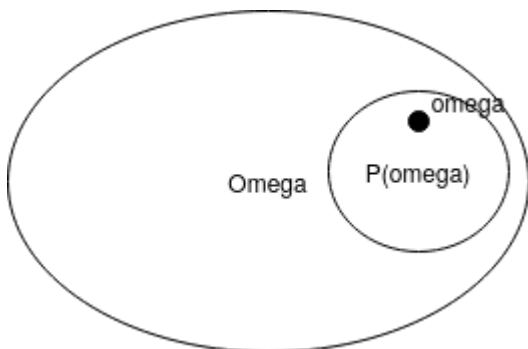
Tedy $\overbrace{\{ \text{mtr} \{ (-\infty, -\infty) \} \cup \{ (4,0) \} \setminus \{ (0,5) \} \} }^{(p, \dots, p), \quad (z, \dots, z)}$, kde $(4,0)$ je rovnováha a $(0,5)$

Hry s neúplnou informací

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\|Vert #1 \right\|rVert}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&}\xdef\AND{\quad \and \quad}\xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}}
\xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix}#1\end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}}\xdef\vp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1}
\xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{#1}} \xdef\str{\^*} \xdef\spv{\mc{V}} \xdef\civ{\mc{U}}
\xdef\other#1{\hat{#1}} \xdef\xx{\vv{x}} \xdef\yy{\vv{y}} $$
```

Znalost

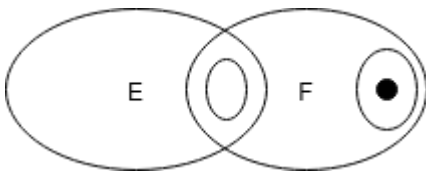
Nechť Ω označuje množinu stavů. Mějme *informační funkci* P , přičemž $P(\omega) \subseteq \Omega$



a máme 2 axiomy $\forall \omega \in \Omega \quad \omega \in P(\omega) \tag{T1}$ a $\omega' \in P(\omega) \implies P(\omega') = P(\omega) \tag{T2}$, přičemž z $\tag{T1}, \tag{T2}$ plyne, že P vytváří rozklad na Ω .

Dále definujme K znalostní funkci a $E \subseteq \Omega$ událost a platí $K(E) = \{\omega \in \Omega \mid P(\omega) \subseteq E\}$, splňující

1. $K(\Omega) = \Omega \tag{\mathcal{T}\{K_1\}}$
2. $E \subseteq F \implies K(E) \subseteq K(F) \tag{\mathcal{T}\{K_2\}}$
3. $K(E) \cap K(F) = K(E \cap F) \tag{\mathcal{T}\{K_3\}}$



4. $K(E) \subseteq E \tag{\mathcal{T}\{K_4\}}$
5. $K(K(E)) = K(E) \tag{\mathcal{T}\{K_5\}}$
6. (axiom moudrosti)
 $\Omega \setminus K(E) = K(\Omega \setminus K(E)) \tag{\mathcal{T}\{K_6\}}$

Příklad - Hádání barvy klobouku

Pro začátek uvažujme 3 hráče, každý dostane **černý** nebo **bílý** klobouk, přičemž jeho barvu nezná. Hráči ví, že minimálně jeden klobouk je bílý. Hráči kteří odhadnou, jakou barvu má jejich klobouk, zvednou ruku a hraje dokud to všichni neví.

Možné situace

- BČČ \implies (pokud by 1. nevěděl, že má jediný bílý, nezvedal by ruku) **KONEC**
- BBČ \implies (bílý si řekne, druhý bílý nezvedl ruku, tedy já musím být taky bílý) \implies (černý nic neví, ale ostatní to už věděli, takže musí mít černý) **KONEC**
- BBB \implies (nikdo nic neví, tedy musí mít někdo bílý klobouk) **KONEC**

Jistě $\Omega = \{c \in \{\text{B}, \text{Č}\}^n \mid \exists i \in N : c(i) = \text{B}\}$ a označme P^i_j informační funkci i -tého hráče v j -tém kole ($j = 1, 2, \dots$)

V případě BČČ je $P^1_1(\text{BČČ}) = \{\text{BČČ}\}$, ale v $P^1_1(\text{BBČ}) = \{\text{BBČ}, \text{ČBČ}\}$

Dále označme E_i jako událost, ve které i -tý hráč dozvěděl svoji barvu a tedy $|E_i| = 1$. Nyní nechť $F^k = \{c \in \Omega \mid |\{c(i) = \text{B}\}| = k\}$

Potom $P^2_j(c) = P^1_j(c) - F^1$. V našem případě $F^1 = \{\text{BČČ}, \text{ČBČ}, \text{ČČB}\}$, $F^2 = \{\text{BBČ}, \text{BČB}, \text{ČBB}\}$, proto $P^1_1(\text{BBČ}) = \{\text{BBČ}, \text{ČBČ}\} \implies P^2_1 = P^1_1(\text{BBČ})$, $\sqsubset P^3_1(\text{BBČ}) = \{\underbrace{\text{ČBČ}}_{\in E_1}\}$

Označme K_1, K_2 - znalostní funkce 1. a 2. hráče. Dále E je společnou znalostí ve stavu Ω , pokud $K_1(E), K_2(E), K_1(K_2(E)), K_2(K_1(E)), K_2(K_1(K_2(E))), K_1(K_2(K_1(E)))$,

Ω obsahuje ω .

Např. $P_1 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}, \{\omega_6\}\}$, $P_2 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2, \dots, \omega_5\}, \{\omega_6\}\}$, $E = \{\omega_1, \dots, \omega_4\}$, pak jistě

- $K_1(E) = \{\omega_1, \omega_2\}$
- $K_2(E) = \{\omega_1, \dots, \omega_4\}$
- $K_1(K_2(E)) = \{\omega_1, \omega_2\}$ a $K_2(K_1(E)) = \{\omega_1\} = K_2(K_1(K_2(E)))$
- $K_1(K_2(K_1(E))) = \emptyset$

Událost $F \subseteq \Omega$ je samozřejmá mezi 1. a 2. hráčem, jestliže $\forall \omega \in F : P_i(\omega) \subseteq F$ pro $i = 1, 2$

E je společnou znalostí v ω , pokud existuje F , $\omega \in F$, samozřejmá pro $i = 1, 2$. Např. $F = \{\omega_1, \dots, \omega_5\}$

V příkladu s klobouky

$P_1^1 = \{\{B\check{C}\check{C}\}, \{BB\check{C}, \check{C}B\check{C}\}, \{B\check{C}B, \check{C}\check{C}B\}, \{BBB, \check{C}BB\}\}$ $P_2^1 = \{\{\check{C}B\check{C}\}, \{BB\check{C}, B\check{C}\check{C}\}, \{\check{C}BB, \check{C}\check{C}B\}, \{BBB, B\check{C}B\}\}$

