

Subgradient a subdiferenciál a Fenchelova transformace

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \text{#1} \right\|} \xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\brackets#1{\left\{ \text{#1} \right\}} \xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\tagged#1{\text{#1}} \xdef\tagged*#1{\text{#1}} \xdef\tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{\text{#1}}} \xdef\tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\tagEq#1{\href{\#eq-#1}{\text{#1}}} \xdef\tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1 \xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1 \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1 \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1 \xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1 \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1 \xdef\rd#1{\mathrm{r}} \partial, #1 \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1 \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1 \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1 \xdef\hess#1{\nabla^2}, #1 \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1 $$
```

Subgradient a subdiferenciál

Definice $\S{2.5.1}$ (Subgradient a subdiferenciál)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina. Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ se nazývá **subgradient** funkce $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $x^* \in X$, jestliže $f(x) - f(x^*) \leq \langle a, x - x^* \rangle$ $\forall x \in X$. Množina všech **subgradientů** funkce f v bodě x^* se nazývá **subdiferenciál** funkce f v bodě x^* a značí se $\partial f(x^*)$. Funkce f se nazývá **subdiferencovatelná** v bodě x^* , jestliže $\partial f(x^*) \neq \emptyset$.

“ Jistě platí podle Věty $\S{2.4.2}$ o konvexní funkci, že $\nabla f(x^*) \in \partial f(x^*)$ ”

Speciálně, je-li $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **konvexní** a $x^* \in \text{ri } X$, pak podle Věty $\S{2.4.7}$ o konvexní funkci existují **jednostranné** derivace $f'_-(x^*)$, $f'_+(x^*)$, přičemž platí $f'_-(x^*) \leq f'_+(x^*)$. V tomto případě pak máme $\partial f(x^*) = [f'_-(x^*), f'_+(x^*)]$.

Věta 2.5.4

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

- Je-li funkce f **konvexní** a $x^* \in \text{ri } X$, pak $\text{subdiference}(f, x^*)$ je **neprázdná, uzavřená a konvexní** množina
- Je-li $\text{subdiference}(f, x)$ **neprázdná** pro každé $x \in X$, pak f je **konvexní** na X

Fenchelova transformace

Fenchelova transformace je transformace, která k funkci $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ přiřadí **konvexní** funkci $f^*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Této přidružené funkci f^* se v řeči *optimalizace/matematického programování* říká **duální úloha** (viz Definice 4.3.3).

Definice 2.6.1 (Fenchelova transformace)

Nechť $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Funkce $f^*(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [x \cdot y - f(x)]$ se nazývá **Fenchelova transformace** funkce f (nebo také **(konvexně) konjugovanou funkcí** funkce f).

“Jistě $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ a proto definujeme ještě **efektivní definiční obor** $D^*(f) = \{x \in D(f) \mid f(x) < \infty\}$

Lemma 2.6.3

Nechť je dána funkce $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a f^* je její Fenchelova transformace. Pak následující tvrzení jsou pravdivá:

- Funkce f^* je konvexní na množině $Y := \{y \in \mathbb{R}^n \mid f^*(y) < \infty\}$
- Pro každé $x \in X$ a $y \in \mathbb{R}^n$ platí tzv. *Fenchelova(-Youngova) nerovnost* $f(x) + f^*(y) \geq x \cdot y$ přičemž **rovnost nastane** právě tehdy, když $y \in \text{subdiference}(f, x)$.
- Je-li $f(x) \leq g(x)$ na X , pak $f^*(y) \geq g^*(y)$ pro všechna $y \in \mathbb{R}^n$.

Věta 2.6.6 (Fenchel & Moreau)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ **konvexní** na X . Pak v **každém bodě spojitosti** funkce f platí tzv. *Fenchelova rovnost* $f^{**} = f$.

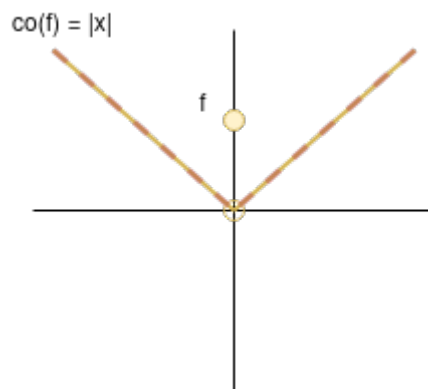
Jinak řečeno, **druhá** Fenchelova transformace ke **konvexní** funkci je s touto funkcí **totožná**, tj. $f^{**} \equiv f$ pro f **konvexní**. Navíc jelikož f^* je vždy konvexní, tak dostáváme, že počítat **třetí** Fenchelovu transformaci f^{**} nemá smysl, protože bude totožná s první Fenchelovou transformací f^* .

Definice 2.6.7 (Obálka funkce)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Potom funkce $g(x) := \sup \{h(x) \mid h \text{ je konvexní a } h(x) \leq f(x) \text{ pro všechna } x \in X\}$ se nazývá **konvexní obálka (obal) funkce** f a značí se $\text{co } f$.

Jinak řečeno, $\text{co } f$ je **největší** konvexní funkce, která je **majorizována** funkcí f .

Jistě platí $D(\text{co } f) = \text{conv}(D(f))$, z čehož plyne $\text{conv}(\text{epi } f) \subseteq \text{epi}(\text{co } f)$



Zde $\text{conv}(\text{epi } f) = \text{epi} \{|x|\} \setminus \{0\}$, ale $0 \in \text{epi}(\text{co } f)$

Věta 2.6.9

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Potom pro každé $x \in X$ platí $\text{co } f(x) = f^{**}(x)$