

# Oddělování konvexních množin

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|} \xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}} \xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{\text{#1}} \xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}\, , #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\, , #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}\, , #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\, , #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\, , #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\, , #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\, , #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}\, , #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\, , #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}\, , #1} \xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1} \xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1} \xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}\, , #1} \xdef\iter#1{\wedge^{#1}} \xdef\str{*} \xdef\spv{\mc V} \xdef\civ{\mc U} \xdef\knvxProg{\tagEqHere{4.1}{./nutne-a-postacujici-podminky-optimality} \, , \and \, \tagEqHere{4.2}{nutne-a-postacujici-podminky-optimality}} $$
```

## Oddělitelnost množin

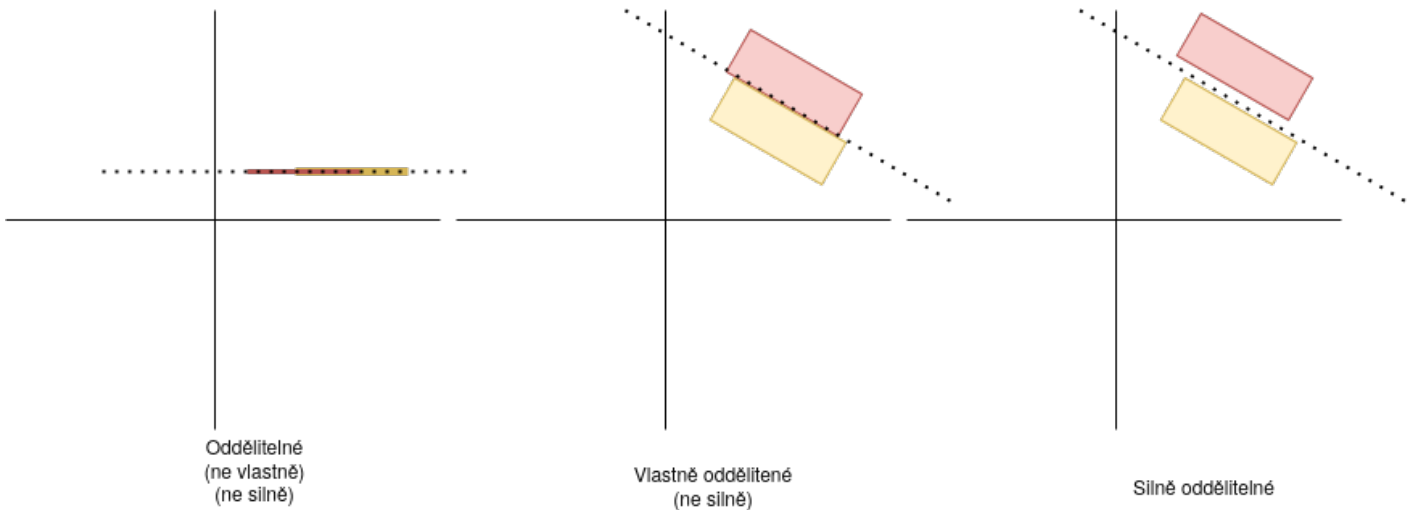
### Definice $\S D{2.3.1}$ (Oddělitelnost množin)

Neprázdné množiny  $X_1, X_2$  se nazývají

- **oddělitelné**, jestliže existuje  $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  takové, že  $\scal p {x_1} \geq \scal p {x_2}$  pro každé  $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ .
- **vlastně oddělitelné**, jestliže jsou *oddělitelné* a zároveň existují body  $x_1^* \in X_1, x_2^* \in X_2$  takové, že  $\scal p {x_1^*} > \scal p {x_2^*}$
- **silně oddělitelné**, jestliže existuje  $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  takové, že  $\inf_{x_1 \in X_1} \scal p {x_1} > \sup_{x_2 \in X_2} \scal p {x_2}$ , je-li navíc  $\beta \in [\sup_{x_2 \in X_2} \scal p {x_2}, \inf_{x_1 \in X_1} \scal p {x_1}]$ , nadrovina

$H_{\{p,\beta\}} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{scal } p \ x = \beta\}$  se nazývá **oddělující nadrovinou** množin  $X_1$  a  $X_2$ .

“ Ve vyjádření  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{scal } p \ x = \beta\}$  značí  $p$  normálový vektor nadroviny a  $\beta$  její posunutí



## Definice $D\{2.3.2\}$ (Projekce bodu)

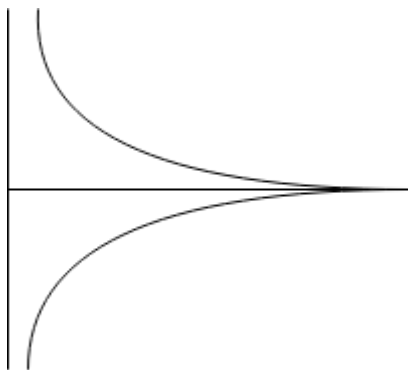
Nechť  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je **neprázdná** množina a  $x \in \mathbb{R}^n$ . Bod  $x^* \in X$  nazveme **projekcí bodu  $x$  na množinu  $X$**  a označíme  $\text{proj}_X(x)$ , jestliže  $\| \text{proj}_X(x) - x \| \leq \| y - x \|$  pro každé  $y \in X$ .

## Věta $D\{2.3.4\}$

Neprázdne konvexní množiny  $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  jsou **silně oddělitelné** právě tehdy, když mají nenulovou vzdálenost, tj.  $\text{dist}(X_1, X_2) := \inf_{x_1 \in X_1, x_2 \in X_2} \|x_1 - x_2\| > 0$ , což je ekvivalentní s podmínkou  $0 \notin \overline{X_1 - X_2}$ .

Pod **kompaktní** množinou myslíme množinu, která je **ohraničená** (má konečný průměr) a **uzavřená** (obsahuje svou hranici).

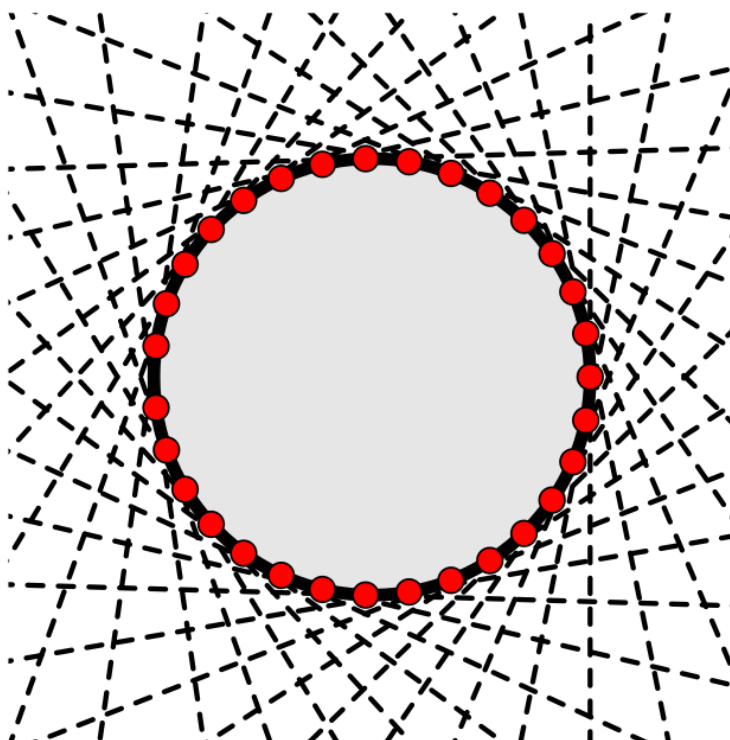
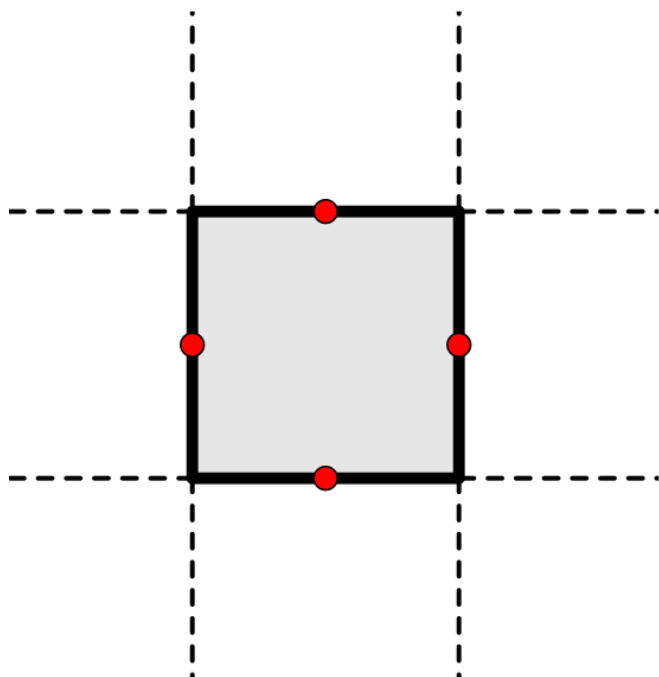
Pokud jsou množiny  $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  **neprázdné**, **konvexní** a **disjunktní** a navíc BÚNO je  $X_1$  **uzavřená** a  $X_2$  **kompaktní**, tak jsou množiny **silně oddělitelné**. Požadavek **kompaktnosti** množiny  $X_2$  vynechat nelze, viz protipříklad dvou hyperbol (obrázek je pouze ilustrativní)



## Věta $\{2.3.5a\}$ (Geometrický popis konvexních množin)

Libovolná **uzavřená** konvexní množina  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je řešením (nekonečné) soustavy **neostrých** lineárních rovnic.

“ **Geometricky**: každá uzavřená konvexní množina  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je **průnikem uzavřených poloprostorů**, konkrétně **všech** uzavřených poloprostorů obsahujících  $X$  ”



## Opěrné nadroviny

### Definice $\{2.3.6\}$ (Opěrná nadrovina)

Nechť  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je neprázdná množina a nechť  $a \in \partial X := \overline{X} \setminus \text{interior } X$ . Nadrovina  $H_{\{p, \beta\}}$  se nazývá

- **opěrnou nadrovinou** množiny  $X$  v bodě  $a$ , jestliže  $\forall x \in X, \exists \alpha \geq 0$  pro každé  $x \in X$
- **vlastní opěrnou nadrovinou** množiny  $X$ , jestliže je **opěrnou nadrovinou** množiny  $X$  a zároveň existuje  $x^* \in X$  takové, že  $\exists \alpha \{x^*\} > \beta$

“ Jinak řečeno množina musí ležet pouze v **jednom** z poloprostorů určených opěrnou nadrovinou.

## Věta D{2.3.7} (Existenci opěrné nadroviny)

Nechť  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je neprázdná konvexní množina a nechť  $a \in \text{rd } X \subseteq \text{partial } X$ . Pak v bodě  $a$  existuje **vlastní** opěrná nadrovina množiny  $X$ .

“ Pro relativní vnitřek  $\text{ri } X$  množiny  $X$  a její vnitřek platí  $\text{interior } X \subseteq \text{ri } X$  a tedy jistě  $\overline{X} \setminus \text{ri } X = \text{rd } X \subseteq \text{partial } X = \overline{X} \setminus \text{interior } X$

# Podmínky oddělitelnosti

## Věta D{2.3.7a} (Oddělitelnost množin)

Nechť  $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  jsou neprázdné, konvexní a disjunktní množiny. Pak pro tyto množiny existuje oddělující nadrovina.

## Věta D{2.3.8}

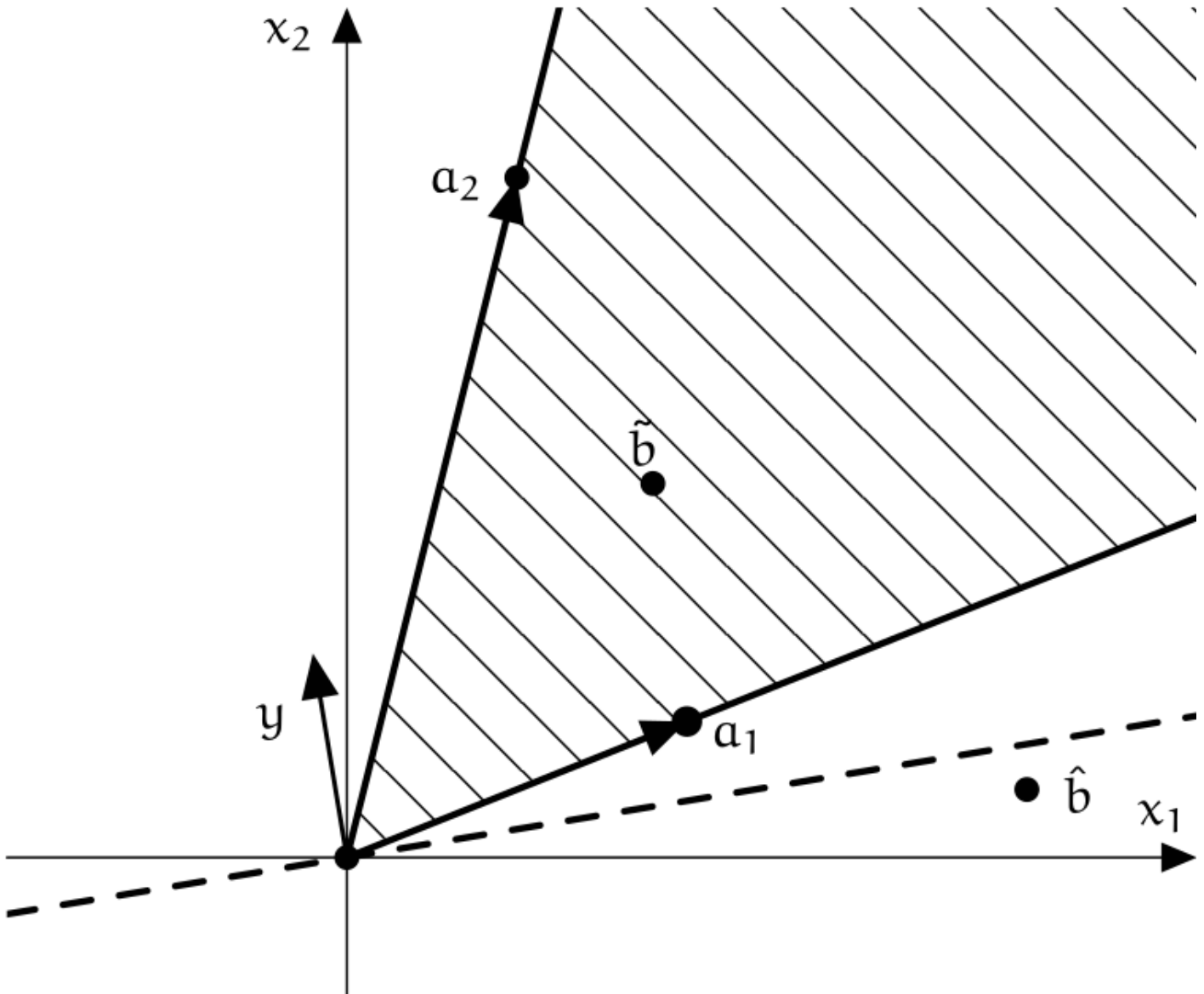
Neprázdné konvexní množiny  $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  jsou **vlastně** oddělitelné právě tehdy, když  $\text{ri } X_1 \cap \text{ri } X_2 = \emptyset$ .

## Věta D{2.3.9} (Farkas & Minkowski)

Nechť  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a  $b \in \mathbb{R}^m$ . Potom je **právě jeden** z následujících systémů rovnic a nerovnic řešitelný:  $Ax = b, x \geq 0$ ,  $\{T{2.3.5}\}$   $A^T y \geq 0, y \leq b$   $\{T{2.3.6}\}$

Jinak řečeno soustava  $\text{tagEq}\{2.3.5\}$  má řešení právě tehdy, když pro všechna  $y \in \mathbb{R}^m$  platí  $A^T y \geq 0$  a zároveň  $\text{scal } y b \geq 0$

Ještě jinak můžeme větu formulovat tak, že buď  $b$  leží v *konvexním kuželu*  $\text{cone}\{a_i\}_{i=1}^n$  nebo jsou  $b$  a *konvexní kužel* **silně oddělitelné**.



Z této věty pak plynou tzv. **věty o alternativě**, které můžeme najít například v lineárním programování.

Tvrzení **Věty**  $\text{tagDe}\{2.3.9\}$  můžeme také napsat jako:

*Jestliže systém  $f_0(x) := \text{scal } \{a_0\} x < 0$ ,  $f_i(x) := \text{scal } \{a_i\} x \leq 0$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  nemá pro daná  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$  řešení na  $\mathbb{R}^n$ , pak existují čísla  $y_1, \dots, y_m \geq 0$  taková, že  $a_0 + \sum_{i=1}^m y_i a_i = 0$ , tj.  $f_0(x) + \sum_{i=1}^m y_i f_i(x) = 0$  pro každé  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

Toto plyne z toho, že pokud v  $\text{tagDe}\{2.3.9\}$  položíme  $b = a_0$  a  $A = -(a_1, \dots, a_m)$  (a zaměníme-li  $x$  a  $y$ ), pak podle předpokladu **nemá** systém  $A^T x \geq 0$ ,  $\text{scal } x \{a_0\}$

$< 0$  řešení. A tedy dostáváme, že systém  $Ay = a_0, y \geq 0$  řešení **mít musí**.

---

## Věta $\S 2.3.12$ (Fan & Glicksburg & Hoffman)

Nechť množina  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je konvexní, funkce  $f_1, \dots, f_k: X \rightarrow \mathbb{R}$  jsou **konvexní** a funkce  $f_{k+1}, \dots, f_m$  **afinní**, tj. pro  $j \in \{k+1, \dots, m\}$  máme  $f_j = \sum_{i=1}^k \alpha_j^i f_i + \beta_j$  pro vhodná  $\alpha_j^i \in \mathbb{R}$  a  $\beta_j \in \mathbb{R}$ . Jestliže systém nerovností a rovností 
$$\begin{cases} f_i(x) < 0, & i \in \{1, \dots, k\} \\ f_j(x) = 0, & j \in \{k+1, \dots, m\} \end{cases} \tag{T{2.3.8}}$$
 nemá řešení na  $X$ , pak existují takové konstanty  $y_1, \dots, y_k \geq 0$  a  $y_{k+1}, \dots, y_m \in \mathbb{R}$  že pro alespoň jedno  $l \in \{1, \dots, m\}$  je  $y_l \neq 0$  a pro všechna  $x \in X$  platí 
$$\sum_{i=1}^m y_i f_i(x) \geq 0 \tag{T{2.3.9}}$$

---

Následující věta udává podmínky, které zajišťují kladnost jistého význačného  $y_i$  (BÚNO  $y_i = 0$ ) ve vztahu  $\tag{Eq{2.3.9}}$ . Po vydělení vztahu  $\tag{Eq{2.3.9}}$  tímto  $y_i$  dostaneme BÚNO  $y_i = 1$ .

## Věta $\S 2.3.13$ (Podmínky regularity)

Nechť množina  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je konvexní a funkce  $f_0, \dots, f_m: X \rightarrow \mathbb{R}$  jsou konvexní. Jestliže systém nerovností 
$$f_0(x) < 0, \tag{T{2.3.10}}$$
 
$$f_i(x) < 0, \quad i \in \{1, \dots, m\} \tag{T{2.3.11}}$$
 nemá řešení na  $X$  a podsystém  $\tag{Eq{2.3.11}}$  má řešení na  $X$ , pak existují  $y_1, \dots, y_m \geq 0$  taková, že pro všechna  $x \in X$  platí 
$$f_0(x) + \sum_{i=1}^m y_i f_i(x) \geq 0 \tag{T{2.3.12}}$$

---

Revision #13

Created 29 December 2022 12:54:23 by Sceptri

Updated 3 January 2023 09:23:24 by Sceptri