

Oddělování konvexních množin

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \text{\rm #1} \right\|} \xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}} \xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mcal#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\a{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{\text{#1}} \xdef\tagged*#1{\text{#1}} \xdef\tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{\text{#1}}} \xdef\tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\tagEq#1{\href{\#eq-#1}{\text{#1}}} \xdef\tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}\, , #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\, , #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}\, , #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\, , #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\, , #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\, , #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\, , #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}\, , #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\, , #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}\, , #1} \xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1} \xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1} \xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}\, , #1} \xdef\iter#1{\wedge^{#1}} \xdef\str{\ast} \xdef\spv{\mathcal V} \xdef\civ{\mathcal U} \xdef\knvxProg{\tagEqHere{4.1}{./nutne-a-postacujici-podminky-optimality} \, , \and \, \tagEqHere{4.2}{nutne-a-postacujici-podminky-optimality}} $$
```

Oddělitelnost množin

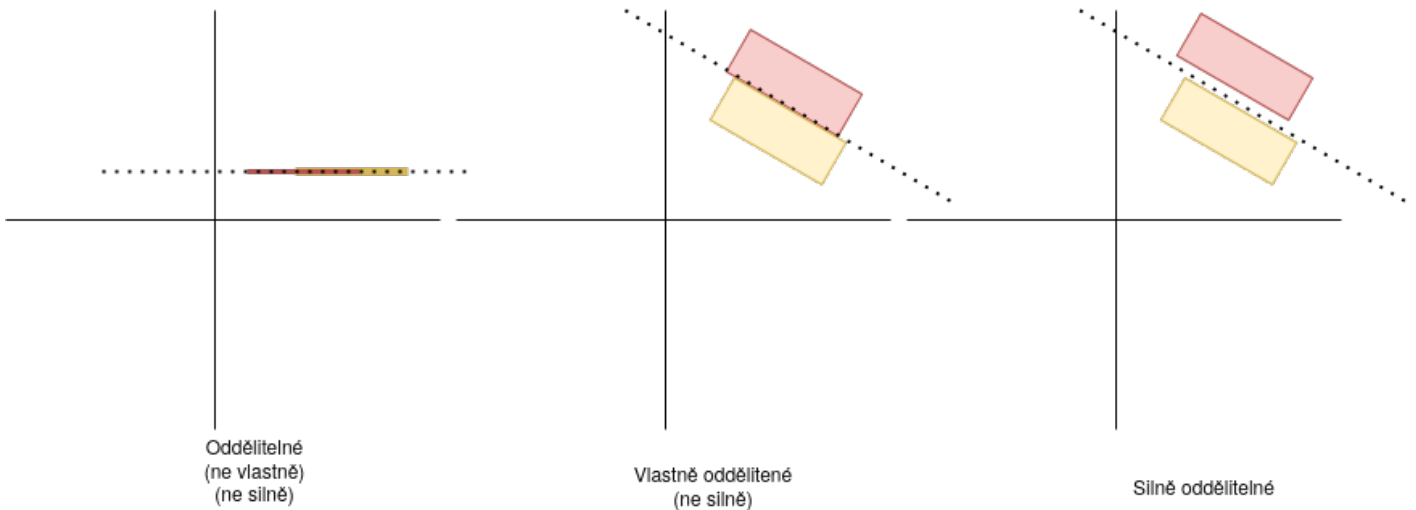
Definice $\S D{2.3.1}$ (Oddělitelnost množin)

Neprázdné množiny X_1, X_2 se nazývají

- **oddělitelné**, jestliže existuje $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ takové, že $\scal p {x_1} \geq \scal p {x_2}$ pro každé $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$.
- **vlastně oddělitelné**, jestliže jsou *oddělitelné* a zároveň existují body $x_1^* \in X_1, x_2^* \in X_2$ takové, že $\scal p {x_1^*} > \scal p {x_2^*}$
- **silně oddělitelné**, jestliže existuje $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ takové, že $\inf_{x_1 \in X_1} \scal p {x_1} > \sup_{x_2 \in X_2} \scal p {x_2}$, je-li navíc $\beta \in [\sup_{x_2 \in X_2} \scal p {x_2}, \inf_{x_1 \in X_1} \scal p {x_1}]$, nadrovina

$H_{\{p,\beta\}} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{scal } p \ x = \beta\}$ se nazývá **oddělující nadrovinou** množin X_1 a X_2 .

“ Ve vyjádření $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{scal } p \ x = \beta\}$ značí p normálový vektor nadroviny a β její posunutí



Definice $D\{2.3.2\}$ (Projekce bodu)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je **neprázdná** množina a $x \in \mathbb{R}^n$. Bod $x^* \in X$ nazveme **projekcí bodu x na množinu X** a označíme $\text{proj}_X(x)$, jestliže $\| \text{proj}_X(x) - x \| \leq \| y - x \|$ pro každé $y \in X$.

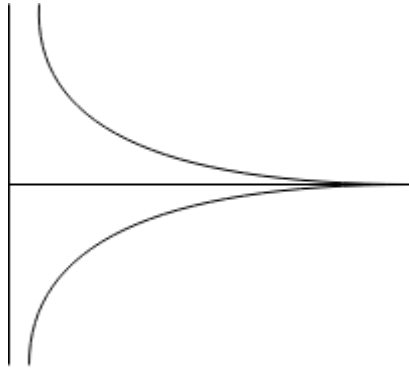
Věta $D\{2.3.4\}$

Neprázdne konvexní množiny $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou **silně oddělitelné** právě tehdy, když mají nenulovou vzdálenost, tj. $\text{dist}(X_1, X_2) := \inf_{x_1 \in X_1, x_2 \in X_2} \|x_1 - x_2\| > 0$, což je ekvivalentní s podmínkou $0 \notin \overline{X_1 - X_2}$.

Pod **kompaktní** množinou myslíme množinu, která je **ohraničená** (má konečný průměr) a **uzavřená** (obsahuje svou hranici).

Pokud jsou množiny $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ **neprázdné**, **konvexní** a **disjunktní** a navíc BÚNO je X_1 **uzavřená** a X_2 **kompaktní**, tak jsou množiny **silně oddělitelné**.

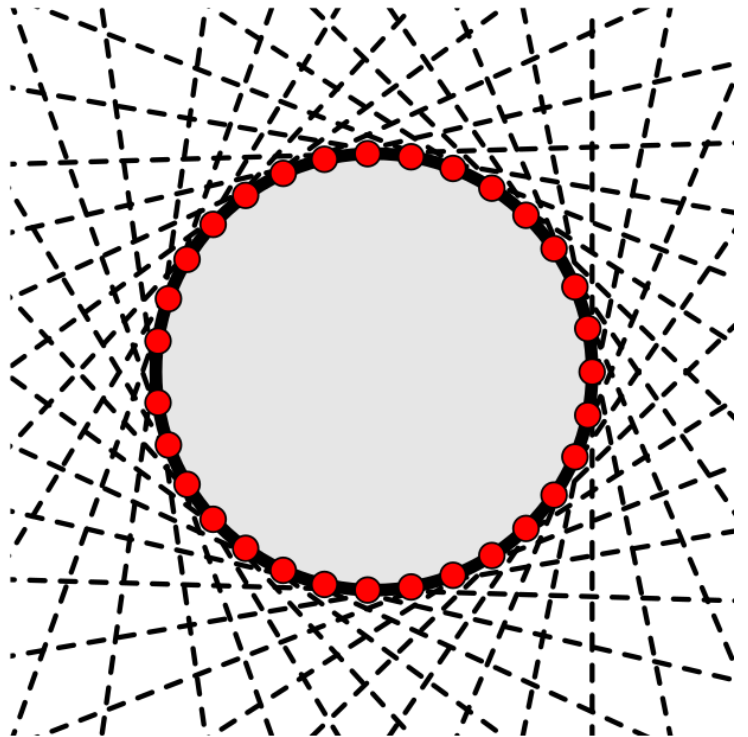
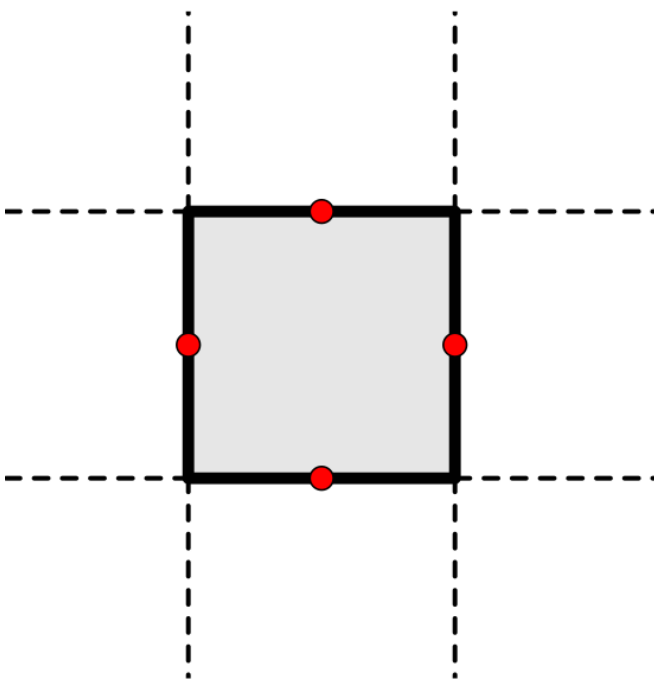
Požadavek **kompaktnosti** množiny X_2 vynechat nelze, viz protipříklad dvou hyperbol (obrázek je pouze ilustrativní)



Věta $\{2.3.5a\}$ (Geometrický popis konvexních množin)

Libovolná **uzavřená** konvexní množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je řešením (*nekonečné*) soustavy **neostrých** lineárních rovnic.

“ **Geometricky**: každá uzavřená konvexní množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je **průnikem uzavřených poloprostorů**, konkrétně **všech** uzavřených poloprostorů obsahujících X ”



Opěrné nadroviny

Definice $\{2.3.6\}$ (Opěrná nadrovina)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je *neprázdná* množina a nechť $a \in \partial X := \overline{X} \setminus \text{interior } X$. Nadrovina $H_{\{p, \beta\}}$ se nazývá

- **opěrnou nadrovinou** množiny X v bodě a , jestliže $\forall x \in X, \exists \beta \geq 0$ pro každé $x \in X$
- **vlastní opěrnou nadrovinou** množiny X , jestliže je **opěrnou nadrovinou** množiny X a zároveň existuje $x^* \in X$ takové, že $\exists \beta > 0$

“ Jinak řečeno množina musí ležet pouze v **jednom** z poloprostorů určených opěrnou nadrovinou.

Věta 2.3.7 (Existenci opěrné nadroviny)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdňá konvexní množina a nechť $a \in \text{rd } X$. Pak v bodě a existuje **vlastní** opěrná nadrovina množiny X .

“ Pro relativní vnitřek $\text{ri } X$ množiny X a její vnitřek platí $\text{interior } X \subseteq \text{ri } X$ a tedy jistě $\overline{X} \setminus \text{ri } X = \text{rd } X \subseteq \text{partial } X = \overline{X} \setminus \text{interior } X$

Podmínky oddělitelnosti

Věta 2.3.7a (Oddělitelnost množin)

Nechť $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou neprázdňé, konvexní a disjunktní množiny. Pak pro tyto množiny existuje oddělující nadrovina.

Věta 2.3.8

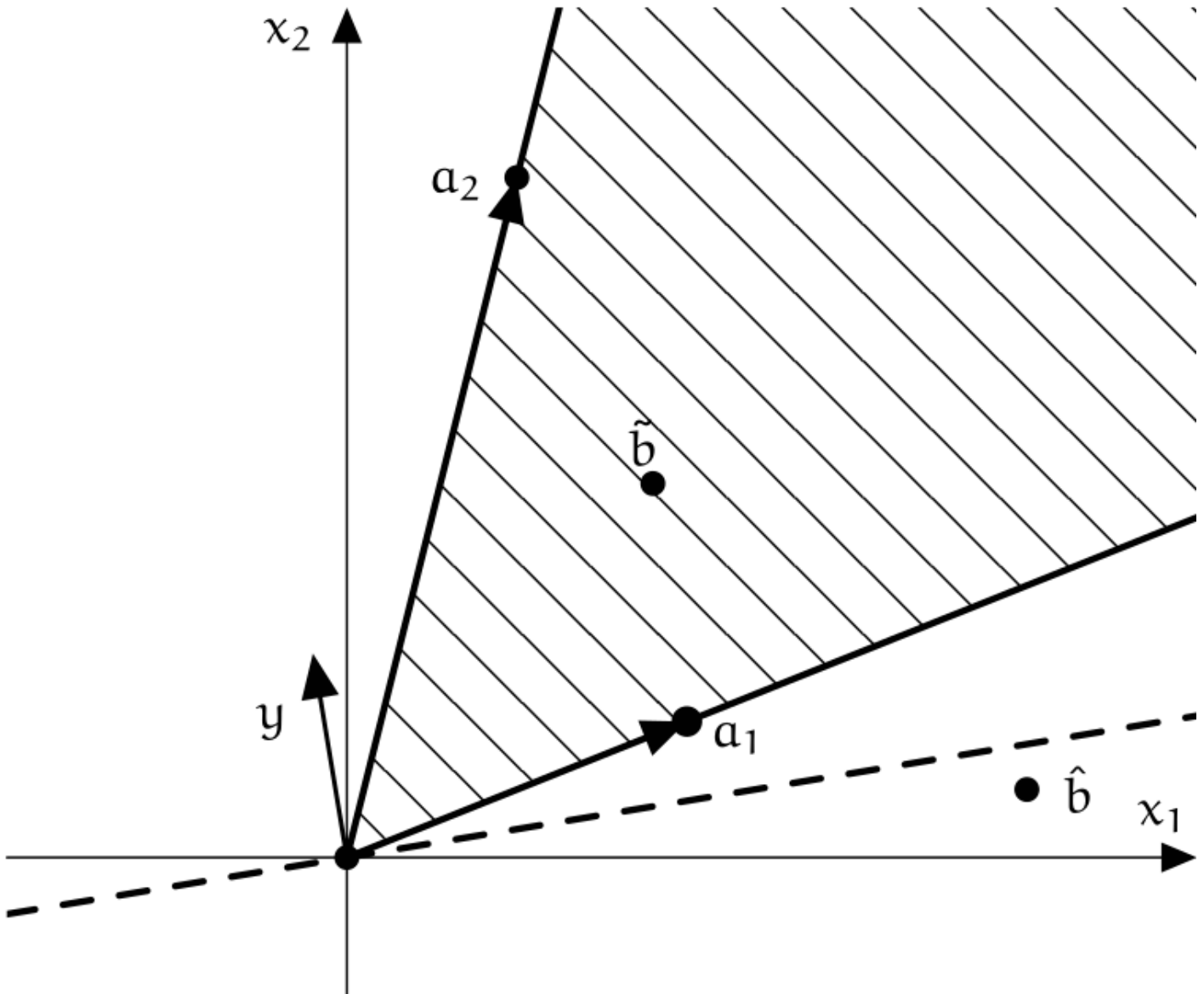
Neprázdňé konvexní množiny $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou **vlastně** oddělitelné právě tehdy, když $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

Věta 2.3.9 (Farkas & Minkowski)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $b \in \mathbb{R}^m$. Potom je **právě jeden** z následujících systémů rovnic a nerovnic řešitelný: $Ax = b, x \geq 0$ (2.3.5) $A^T y \geq 0, y \leq b$ (2.3.6)

Jinak řečeno soustava $\text{tagEq}\{2.3.5\}$ má řešení právě tehdy, když pro všechna $y \in \mathbb{R}^m$ platí $A^T y \geq 0$ a zároveň $\text{scal } y b \geq 0$

Ještě jinak můžeme větu formulovat tak, že buď b leží v *konvexním kuželu* $\text{cone}\{a_i\}_{i=1}^n$ nebo jsou b a *konvexní kužel* **silně oddělitelné**.



Z této věty pak plynou tzv. **věty o alternativě**, které můžeme najít například v lineárním programování.

Tvrzení **Věty** $\text{tagDe}\{2.3.9\}$ můžeme také napsat jako:

Jestliže systém $f_0(x) := \text{scal } \{a_0\} x < 0$, $f_i(x) := \text{scal } \{a_i\} x \leq 0$, $i \in \{1, \dots, m\}$ nemá pro daná $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ řešení na \mathbb{R}^n , pak existují čísla $y_1, \dots, y_m \geq 0$ taková, že $a_0 + \sum_{i=1}^m y_i a_i = 0$, tj. $f_0(x) + \sum_{i=1}^m y_i f_i(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$.

Toto plyne z toho, že pokud v $\text{tagDe}\{2.3.9\}$ položíme $b = a_0$ a $A = -(a_1, \dots, a_m)$ (a zaměníme-li x a y), pak podle předpokladu **nemá** systém $A^T x \geq 0$, $\text{scal } x \{a_0\}$

< 0 řešení. A tedy dostáváme, že systém $Ay = a_0, y \geq 0$ řešení **mít musí**.

Věta 2.3.12 (Fan & Glicksburg & Hoffman)

Nechť množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní, funkce $f_1, \dots, f_k: X \rightarrow \mathbb{R}$ jsou **konvexní** a funkce f_{k+1}, \dots, f_m **afinní**, tj. pro $j \in \{k+1, \dots, m\}$ máme $f_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i + \beta_j$ pro vhodná $a_j \in \mathbb{R}^n$ a $\beta_j \in \mathbb{R}$. Jestliže systém nerovností a rovností
$$\begin{cases} f_i(x) < 0, & i \in \{1, \dots, k\} \\ f_j(x) = 0, & j \in \{k+1, \dots, m\} \end{cases} \tag{T{2.3.8}}$$
 nemá řešení na X , pak existují takové konstanty $y_1, \dots, y_k \geq 0$ a $y_{k+1}, \dots, y_m \in \mathbb{R}$ že pro alespoň jedno $l \in \{1, \dots, m\}$ je $y_l \neq 0$ a pro všechna $x \in X$ platí
$$\sum_{i=1}^m y_i f_i(x) \geq 0 \tag{T{2.3.9}}$$

Následující věta udává podmínky, které zajišťují kladnost jistého význačného y_i (BÚNO $y_i = 0$) ve vztahu 2.3.9. Po vydělení vztahu 2.3.9 tímto y_i dostaneme BÚNO $y_i = 1$.

Věta 2.3.13 (Podmínky regularity)

Nechť množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní a funkce $f_0, \dots, f_m: X \rightarrow \mathbb{R}$ jsou konvexní. Jestliže systém nerovností
$$f_0(x) < 0, \tag{T{2.3.10}}$$

$$f_i(x) < 0, \quad i \in \{1, \dots, m\} \tag{T{2.3.11}}$$
 nemá řešení na X a podsystém 2.3.11 má řešení na X , pak existují $y_1, \dots, y_m \geq 0$ taková, že pro všechna $x \in X$ platí
$$f_0(x) + \sum_{i=1}^m y_i f_i(x) \geq 0 \tag{T{2.3.12}}$$

Revision #13

Created 29 December 2022 12:54:23 by Sceptri

Updated 3 January 2023 09:23:24 by Sceptri