

# Numerické metody v R

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \text{\rm #1} \right\|} \xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}} \xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\tagged#1{\text{#1}} \xdef\tagged*#1{\text{#1}} \xdef\tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{\text{#1}}} \xdef\tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\tagEq#1{\href{\#eq-#1}{\text{#1}}} \xdef\tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\text{\rm conv}\, , #1} \xdef\cone#1{\text{\rm cone}\, , #1} \xdef\aff#1{\text{\rm aff}\, , #1} \xdef\lin#1{\text{\rm Lin}\, , #1} \xdef\span#1{\text{\rm span}\, , #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\text{\rm ri}\, , #1} \xdef\rd#1{\text{\rm r}\partial\, , #1} \xdef\interior#1{\text{\rm int}\, , #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\text{\rm epi}\, , #1} \xdef\grad#1{\text{\rm grad}\, , #1} \xdef\hess#1{\nabla^2\, , #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\text{\rm co}\, , #1} $$
```

## Rychlost konvergence

### Definice $\mathcal{D}\{3.1\}$

Nechť jsou dány 2 posloupnosti  $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$  a  $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$  takové, že  $e_k \in [0, \infty)$ ,  $e_k \rightarrow 0$  a  $h_k \in [0, \infty)$ ,  $h_k \rightarrow 0$ . Řekneme, že posloupnost  $\{e_k\}$  konverguje **rychleji** (*pomaleji*) než  $\{h_k\}$ , pokud existuje index  $k \in \mathbb{N}_0$  takový, že  $e_k \leq (\geq) h_k$   $\forall k \in [\tilde{k}, \infty)$   $\cap \mathbb{N}_0$ .

### Definice $\mathcal{D}\{3.2\}$ (Rychlost konvergence)

Nechť je dána posloupnost  $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$  splňující  $e_k \in [0, \infty)$  a  $e_k \rightarrow 0$ . Řekneme, že posloupnost  $\{e_k\}$  konverguje

- **alespoň lineárně s rychlostí**  $\beta \in (0,1)$ , pokud konverguje **rychleji** než **geometrická** posloupnost se členy tvaru  $q \bar{\beta}^k$ , kde  $q > 0$  a  $\bar{\beta} \in (\beta, 1)$ .
  - Čím **větší**  $\bar{\beta}$ , tím **pomaleji** jde tato geometrická posloupnost k nule - tj. konverguje rychleji než geometrická posloupnost s  $\bar{\beta}$  větší než  $\beta$ .
- **nejvýše lineárně s rychlostí**  $\beta \in (0,1)$ , pokud konverguje **pomaleji** než **geometrická** posloupnost se členy tvaru  $q \bar{\beta}^k$ , kde  $q > 0$  a  $\bar{\beta} \in (0, \beta)$ .

- **lineárně s rychlostí**  $\beta \in (0,1)$ , pokud konverguje **nejvýše** a současně **alespoň** lineárně s rychlostí  $\beta$ .
- **superlineárně (sublineárně)**, pokud konverguje **rychleji** (pomaleji) než libovolná geometrická posloupnost se členy tvaru  $q \beta^k$ , kde  $q > 0$  a  $\beta \in (0,1)$ .

## Definice $\mathcal{D}\{3.4\}$

Nechť je dána posloupnost  $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$  splňující  $e_k \in [0, \infty)$  a  $e_k \rightarrow 0$ , přičemž  $\{e_k\}$  konverguje **superlineárně**. Řekneme, že posloupnost  $\{e_k\}$  konverguje

- **alespoň superlineárně s řádem**  $p > 1$ , pokud konverguje **rychleji** než všechny posloupnosti se členy tvaru  $q \beta^{\lfloor p^k \rfloor}$ , kde  $q > 0$  a  $\beta \in (0,1)$  a  $\lfloor p \rfloor \in (1, p)$ 
  - čím **větší**  $\lfloor p \rfloor$ , tím **rychleji** posloupnost  $q \beta^{\lfloor p^k \rfloor}$  konverguje - tj.  $\{e_k\}$  konverguje rychleji než všechny posloupnosti s **menším**  $p$
- **nejvýše superlineárně s řádem**  $p > 1$ , pokud konverguje **pomaleji** než všechny posloupnosti se členy tvaru  $q \beta^{\lfloor p^k \rfloor}$ , kde  $q > 0$  a  $\beta \in (0,1)$  a  $\lfloor p \rfloor \in (p, \infty)$
- **superlineárně s řádem**  $p > 1$ , pokud konverguje **nejvýše** a současně **alespoň** superlineárně s řádem  $p$ .
- **superlineárně s řádem**  $p = 1$ , pokud konverguje **pomaleji** než všechny posloupnosti se členy tvaru  $q \beta^{\lfloor p^k \rfloor}$ , kde  $q > 0$  a  $\beta \in (0,1)$  a  $\lfloor p \rfloor \in (1, \infty)$

# Metody

## Definice $\mathcal{D}\{3.1.1\}$ (Unimodální funkce)

Nechť je dán interval  $I \subset \mathbb{R}$  a funkce  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Řekneme, že  $f$  je **unimodální** na  $I$ , jestliže existuje  $x^* \in I$  takové, že

- $f(x_1) > f(x_2)$  pro libovolná  $x_1, x_2 \in I$  splňující  $x^* > x_1 > x_2$
- $f(x_1) < f(x_2)$  pro libovolná  $x_1, x_2 \in I$  splňující  $x^* < x_1 < x_2$

Jinými slovy, **unimodální** funkce je **klesající** na  $(-\infty, x^*) \cap I$  (tj. *nalevo* od  $x^*$ ) a **rostoucí** na  $I \cap (x^*, \infty)$  (tj. *napravo* od  $x^*$ ).

Unimodalita **neimplikuje** konvexnost (ani se spojitostí), pouze **kvazikonvexnost**

Naopak, *konvexní* funkce **nemusí** nutně být *unimodální* (ale **ostrá konvexnost**  $\implies$  **unimodalita**)

“ Konvexní funkce nemusí být např. jen rostoucí, ale i **neklesající**

V této části budeme řešit úlohu  $f(x) \rightarrow \min, \text{ } x \in I := [a, b]$   $\tag{T{3.1.1}}$

## Lemma $D{3.1.2}$

Nechť  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  je **unimodální** na  $I$  a  $x_1, x_2 \in I$  jsou takové, že  $x_1 < x_2$ .

- Je-li  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , pak  $x^* \leq x_2$
- Je-li  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , pak  $x^* \geq x_1$

### Upozornění:

Dále uvažujme **POUZE UNIMODÁLNÍ** funkce.

Navíc nechť  $N$  značí **povolený počet vyčíslení** a **přesnost** těchto metod je dáno jako  $\bar{x} - x^* |$ , kde  $x^*$  je **přesné** řešení úlohy  $\tag{Eq{3.1.1}}$  a  $\bar{x}$  jeho nalezená aproximace.

# Metoda prostého dělení

“ Tato metoda **není** efektivní a je to *de facto* hrubá síla

Podle parity  $N$  určíme dělicí body intervalu  $I$ .

$N$ liché	$N$ sudé
$x_i := a + \{b - a \over N + 1\} i, \text{ } i=1, \dots, N = 2k - 1$	$x_{2i} := a + \{b - a \over k + 1\} i \text{ } \text{and } x_{2i-1} := x_{2i} - \delta, \text{ } i = 1, \dots, k := N/2,$

kde  $\delta$  je *vhodné malé číslo*.

Poté vyčíslíme  $f(x_1), \dots, f(x_N)$  (což v případě  $N$  **sudého** a  $\delta \in \{0, \{b-a \over k+1\}\}$  znamená **pouze**  $k$  vyčíslení) a nechť v  $x_j$  nastává nejmenší hodnota, tj.  $f(x_j) = \min_{1 \leq i \leq N} f(x_i)$  Pak z **Lemma**  $D{3.1.2}$  plyne, že  $x^* \in [x_{j-1}, x_{j+1}]$  a tento interval nazveme **interval lokalizace minima (ILM)** a za aproximaci  $x^*$  vezmeme *střed* ILM, tj.  $\bar{x} := \{x_{j-1} + x_{j+1} \over 2\}$

Pro **délku**  $|I_N|$  intervalu lokalizace minima platí  $|I_N| := \max_{1 \leq i \leq N} (x_{i+1} - x_{i-1}) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{b-a}{N+1}, & N = 2k-1 \\ \frac{b-a}{N/2} + \delta, & N = 2k \end{cases}$

“ Pro  $N$  **sudé** je **poslední** interval delší, proto dostáváme takový tvar  $|I_N|$

“ Přesnost této metody je dána **polovinou ILM**, tj.  $\frac{|I_N|}{2}$

Rychlost konvergence této metody je **sublineární**, navíc je tento algoritmus **pasivní**, tj. volba  $x_{m+1}$  **nezáleží** na  $x_1, \dots, x_m$  (závisí pouze na  $N$ , či na  $N$  a  $\delta$ ).

“ Při rovnosti funkčních hodnot **preferujeme konec** (teoreticky by to mělo být jedno)

## Metoda půlení intervalu

Nechť nyní  $N = 2k$ . Položme  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$  a  $x_i^- := \frac{a_{i-1} + b_{i-1}}{2} - \delta$  a  $x_i^+ := \frac{a_{i-1} + b_{i-1}}{2} + \delta$ , kde  $\delta > 0$  je dostatečně malé a  $i = 1, \dots, k$ . Vyčíslíme funkci v  $x_i^-$ ,  $x_i^+$ , tj. dostaneme  $f(x_i^-)$ ,  $f(x_i^+)$ . Pak

- jestliže  $f(x_i^-) < f(x_i^+)$ , pak podle **Lemma 3.1.2** je **ILM**  $[a_{i-1}, x_i^+]$   $\implies a_i = a_{i-1}$ ,  $b_i = x_i^+$
- jestliže  $f(x_i^-) > f(x_i^+)$ , pak podle **Lemma 3.1.2** je **ILM**  $[x_i^-, b_{i-1}]$   $\implies a_i = x_i^-$ ,  $b_i = b_{i-1}$

Takto můžeme tento proces opakovat ( $k$ -krát, jelikož máme  $N = 2k$  povolených vyčíslení), kdy za  $a, b$  volíme krajní body **ILM** pro každý krok. Zřejmě, jako aproximaci  $x^*$  v  $k$ -tém kroku bereme **střed ILM** pro  $k$ -tý krok.

Délka **ILM** je v tomto případě  $|I_k| = \frac{b-a}{2^k} + \frac{(2^k-1)\delta}{2^{k-1}}$ , přičemž  $\delta \in [0, \frac{b-a}{2}]$  a navíc pro  $k \rightarrow \infty$  je  $|I_k| \rightarrow 2\delta$ .

“ Z tohoto vyplývá, že čím menší  $\delta$ , tím je metoda přesnější. Nicméně ve skutečnosti se můžeme dostat k zaokrouhlovacím chybám, které dokonce mohou způsobit, že špatně určíme velikosti  $f(x_i^-)$ ,  $f(x_i^+)$  (tím pádem bychom řekli, že  $x^*$  je v opačném intervalu, než je ve skutečnosti)

Tato metoda konverguje **lineárně** s rychlostí  $1/2$ .

“ Při rovnosti funkčních hodnot **zapomínáme konec** (teoreticky by to mělo být jedno)

## Metoda zlatého řezu

Myšlenka metody zlatého řezu "vylepšuje" metodu půlení intervalu tak, že každá další iterace umožňuje pouze **jedno** další vyčíslení.

“ Zde  $\tau$  je řešení rovnice  $\tau^2 - \tau - 1 = 0$ , tj.  $\frac{1}{\tau} \approx 0.618$

Mějme funkci  $f$ , interval  $[a, b]$ , přesnost  $\epsilon$  nebo počet vyčíslení  $N \geq 2$ :

- (Inicializace) Položíme  $a_0 := a$ ,  $b_0 := b$  a  $k := 1$ . Vypočteme  $\mu_1 := a_0 + \frac{b_0 - a_0}{\tau^2}$  a  $\lambda_1 := a_0 + \frac{b_0 - a_0}{\tau}$
- Je-li  $k = N$ , pokračujeme částí 5., jinak následuje krok 3.
- Vyčíslíme  $f(\lambda_k)$  a  $f(\mu_k)$ . Jestliže  $f(\lambda_k) \geq f(\mu_k)$ :
  - Položíme  $a_k := \lambda_k$ ,  $b_k := b_{k-1}$ ,  $\lambda_{k+1} := \mu_k$  a  $\mu_{k+1} := f(\lambda_{k+1}) := f(\mu_k)$ ,  $\mu_{k+1} := a_k + \frac{b_k - a_k}{\tau}$  a pokračujeme na krok 4.
  - Položíme  $a_k := a_{k-1}$ ,  $b_k := \mu_k$ ,  $\lambda_{k+1} := \lambda_k$  a  $\mu_{k+1} := f(\mu_{k+1}) := f(\lambda_k)$ ,  $\lambda_{k+1} := a_k + \frac{b_k - a_k}{\tau^2}$  a pokračujeme na krok 4.
- Položíme  $k := k+1$  a pokračujeme krokem 2.
- Stanovíme poslední  $ILM$  jako  $[a_{k-1}, b_{k-1}]$  a vypočteme  $\bar{x} := \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$ . **KONEC**

Tato metoda konverguje **lineárně** s rychlostí  $\frac{1}{\tau} \approx 0.618$

“ Toto **neznámá**, že by **na stejný počet vyčíslení** byla tato metoda horší než [metoda půlení intervalu](#)

Průběh MZŘ s výchozím intervalem  $I = [a_0, b_0]$  s délkou  $\ell_0 := b_0 - a_0$ .

i (i + 1 vyčíslení)	vzdálenost od $a_{i-1}$ ( $b_{i-1}$ )		délka ILM
	$\lambda_i$ ( $\mu_i$ )	$\mu_i$ ( $\lambda_i$ )	
1	$\ell_0/\tau^2$	$\ell_0/\tau$	$\ell_0/\tau$
2	$\ell_0/\tau^3$	$\ell_0/\tau^2$	$\ell_0/\tau^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N - 1$	$\ell_0/\tau^N$	$\ell_0/\tau^{N-1}$	$\ell_0/\tau^{N-1}$

## Fibonacciho metoda

V této poslední metodě uvažujme, že zkrácení  $\delta$  může být **jiné** v každé kroku metody.

“ Necht  $F_n$  je  $n$ -té Fibonacciho číslo

Máme povoleno  $N$  vyčíslení, takže  $M = N - 1$  a  $\lambda_i = a_{i-1} + \{F_{N-i-1} \over F_{N-i+1}\} l_{i-1} = b_{i-1} - \{F_{N-1} \over F_{N-1+i}\} l_{i-1}$   $\mu_i = a_{i-1} + \{F_{N-1} \over F_{N-1+i}\} l_{i-1} = b_{i-1} - \{F_{N-i-1} \over F_{N-i+1}\} l_{i-1}$

Průběh FM s výchozím intervalem  $I = [a_0, b_0]$  s délkou  $\ell_0 := b_0 - a_0$ .

i (i + 1 vyčíslení)	vzdálenost od a <sub>i-1</sub> (b <sub>i-1</sub> )		délka ILM
	$\lambda_i$ ( $\mu_i$ )	$\mu_i$ ( $\lambda_i$ )	
1	$\frac{F_{N-2}}{F_N} \ell_0$	$\frac{F_{N-1}}{F_N} \ell_0$	$\frac{F_{N-1}}{F_N} \ell_0$
2	$\frac{F_{N-3}}{F_N} \ell_0$	$\frac{F_{N-2}}{F_N} \ell_0$	$\frac{F_{N-2}}{F_N} \ell_0$
⋮	⋮	⋮	⋮
i	$\frac{F_{N-i-1}}{F_N} \ell_0$	$\frac{F_{N-i}}{F_N} \ell_0$	$\frac{F_{N-i}}{F_N} \ell_0$
⋮	⋮	⋮	⋮
N − 2	$\frac{1}{F_N} \ell_0$	$\frac{2}{F_N} \ell_0$	$\frac{2}{F_N} \ell_0$
N − 1 & δ > 0	$\frac{1}{F_N} \ell_0$	$\frac{1}{F_N} \ell_0 + \delta$	$\frac{1}{F_N} \ell_0$ nebo $\frac{1}{F_N} \ell_0 + \delta$
N − 1 & δ < 0	$\frac{1}{F_N} \ell_0 + \delta$	$\frac{1}{F_N} \ell_0$	$\frac{1}{F_N} \ell_0$ nebo $\frac{1}{F_N} \ell_0 +  \delta $

Tato metoda konverguje **lineárně** s rychlostí  $\frac{1}{\tau} \approx 0.618$ , tj. *stejně* jako [metoda zlatého řezu](#)

“ Fibonacciho metoda je (mírně) přesnější, než *metoda zlatého řezu* (která lze vnímat jako *limitní varianta* Fibonacciho metody). Nicméně u Fibonacciho metody je při změně  $N$  potřeba **všechny body přepočítat**, což u metody zlatého řezu **není**.