

Numerické metody v R

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \text{\rm #1} \right\|} \xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}} \xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\tagged#1{\text{#1}} \xdef\tagged*#1{\text{#1}} \xdef\tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{\text{#1}}} \xdef\tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\tagEq#1{\href{\#eq-#1}{\text{#1}}} \xdef\tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}\,, #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\,, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}\,, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\,, #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\,, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\,, #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}\,, #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\,, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}\,, #1} \xdef\hess#1{\nabla^2\,, #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}\,, #1} $$
```

Rychlost konvergence

Definice $\mathcal{D}\{3.1\}$

Nechť jsou dány 2 posloupnosti $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$ takové, že $e_k \in [0, \infty)$, $e_k \rightarrow 0$ a $h_k \in [0, \infty)$, $h_k \rightarrow 0$. Řekneme, že posloupnost $\{e_k\}$ konverguje **rychleji** (*pomaleji*) než $\{h_k\}$, pokud existuje index $k \in \mathbb{N}_0$ takový, že $e_k \leq (\geq) h_k$ $\forall k \in [\tilde{k}, \infty)$ $\cap \mathbb{N}_0$.

Definice $\mathcal{D}\{3.2\}$ (Rychlost konvergence)

Nechť je dána posloupnost $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ splňující $e_k \in [0, \infty)$ a $e_k \rightarrow 0$. Řekneme, že posloupnost $\{e_k\}$ konverguje

- **alespoň lineárně s rychlostí** $\beta \in (0,1)$, pokud konverguje **rychleji** než **geometrická** posloupnost se členy tvaru $q \bar{\beta}^k$, kde $q > 0$ a $\bar{\beta} \in (\beta, 1)$.
 - Čím **větší** $\bar{\beta}$, tím **pomaleji** jde tato geometrická posloupnost k nule - tj. konverguje rychleji než geometrická posloupnost s $\bar{\beta}$ větší než β .
- **nejvýše lineárně s rychlostí** $\beta \in (0,1)$, pokud konverguje **pomaleji** než **geometrická** posloupnost se členy tvaru $q \bar{\beta}^k$, kde $q > 0$ a $\bar{\beta} \in (0, \beta)$.

- **lineárně s rychlostí** $\beta \in (0,1)$, pokud konverguje **nejvýše** a současně **alespoň** lineárně s rychlostí β .
- **superlineárně (sublineárně)**, pokud konverguje **rychleji** (pomaleji) než libovolná geometrická posloupnost se členy tvaru $q \beta^k$, kde $q > 0$ a $\beta \in (0,1)$.

Definice 3.4

Nechť je dána posloupnost $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ splňující $e_k \in [0, \infty)$ a $e_k \rightarrow 0$, přičemž $\{e_k\}$ konverguje **superlineárně**. Řekneme, že posloupnost $\{e_k\}$ konverguje

- **alespoň superlineárně s řádem** $p > 1$, pokud konverguje **rychleji** než všechny posloupnosti se členy tvaru $q \beta^{\lfloor p^k \rfloor}$, kde $q > 0$ a $\beta \in (0,1)$ a $\lfloor p \rfloor \in (1, p)$
 - čím **větší** $\lfloor p \rfloor$, tím **rychleji** posloupnost $q \beta^{\lfloor p^k \rfloor}$ konverguje - tj. $\{e_k\}$ konverguje rychleji než všechny posloupnosti s **menším** p
- **nejvýše superlineárně s řádem** $p > 1$, pokud konverguje **pomaleji** než všechny posloupnosti se členy tvaru $q \beta^{\lfloor p^k \rfloor}$, kde $q > 0$ a $\beta \in (0,1)$ a $\lfloor p \rfloor \in (p, \infty)$
- **superlineárně s řádem** $p > 1$, pokud konverguje **nejvýše** a současně **alespoň** superlineárně s řádem p .
- **superlineárně s řádem** $p = 1$, pokud konverguje **pomaleji** než všechny posloupnosti se členy tvaru $q \beta^{\lfloor p^k \rfloor}$, kde $q > 0$ a $\beta \in (0,1)$ a $\lfloor p \rfloor \in (1, \infty)$

Metody

Definice 3.1.1 (Unimodální funkce)

Nechť je dán interval $I \subset \mathbb{R}$ a funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že f je **unimodální** na I , jestliže existuje $x^* \in I$ takové, že

- $f(x_1) > f(x_2)$ pro libovolná $x_1, x_2 \in I$ splňující $x^* > x_1 > x_2$
- $f(x_1) < f(x_2)$ pro libovolná $x_1, x_2 \in I$ splňující $x^* < x_1 < x_2$

Jinými slovy, **unimodální** funkce je **klesající** na $(-\infty, x^*) \cap I$ (tj. *nalevo* od x^*) a **rostoucí** na $I \cap (x^*, \infty)$ (tj. *napravo* od x^*).

Unimodalita **neimplikuje** konvexnost (ani se spojitostí), pouze **kvazikonvexnost**

Naopak, *konvexní* funkce **nemusí** nutně být *unimodální* (ale **ostrá konvexnost** \implies **unimodalita**)

“ Konvexní funkce nemusí být např. jen rostoucí, ale i **neklesající**

V této části budeme řešit úlohu $f(x) \rightarrow \min, \text{ } x \in I := [a, b]$ $\tag{T{3.1.1}}$

Lemma $D{3.1.2}$

Nechť $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je **unimodální** na I a $x_1, x_2 \in I$ jsou takové, že $x_1 < x_2$.

- Je-li $f(x_1) \leq f(x_2)$, pak $x^* \leq x_2$
- Je-li $f(x_1) \geq f(x_2)$, pak $x^* \geq x_1$

Upozornění:

Dále uvažujme **POUZE UNIMODÁLNÍ** funkce.

Navíc nechť N značí **povolený počet vyčíslení** a **přesnost** těchto metod je dáno jako $|\bar{x} - x^*|$, kde x^* je **přesné** řešení úlohy $\tag{Eq{3.1.1}}$ a \bar{x} jeho nalezená aproximace.

Metoda prostého dělení

“ Tato metoda **není** efektivní a je to *de facto* hrubá síla

Podle parity N určíme dělicí body intervalu I .

N liché	N sudé
$x_i := a + \{b - a \over N + 1\} i, \text{ } i=1, \dots, N = 2k - 1$	$x_{2i} := a + \{b - a \over k + 1\} i \text{ } \text{and } x_{2i-1} := x_{2i} - \delta, \text{ } i = 1, \dots, k := N/2,$

kde δ je *vhodné malé číslo*.

Poté vyčíslíme $f(x_1), \dots, f(x_N)$ (což v případě N **sudého** a $\delta \in \{0, \{b-a \over k+1\}\}$ znamená **pouze** k vyčíslení) a nechť v x_j nastává nejmenší hodnota, tj. $f(x_j) = \min_{1 \leq i \leq N} f(x_i)$ Pak z **Lemma $D{3.1.2}$** plyne, že $x^* \in [x_{j-1}, x_{j+1}]$ a tento interval nazveme **interval lokalizace minima (ILM)** a za aproximaci x^* vezmeme *střed* ILM, tj. $\bar{x} := \{x_{j-1} + x_{j+1} \over 2\}$

Pro **délku** $|I_N|$ intervalu lokalizace minima platí $|I_N| := \max_{1 \leq i \leq N} (x_{i+1} - x_{i-1}) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{b-a}{N+1}, & N = 2k-1 \\ \frac{b-a}{N/2} + \delta, & N = 2k \end{cases}$

“ Pro N **sudé** je **poslední** interval delší, proto dostáváme takový tvar $|I_N|$

“ Přesnost této metody je dána **polovinou ILM**, tj. $\frac{|I_N|}{2}$

Rychlost konvergence této metody je **sublineární**, navíc je tento algoritmus **pasivní**, tj. volba x_{m+1} **nezáleží** na x_1, \dots, x_m (závisí pouze na N , či na N a δ).

“ Při rovnosti funkčních hodnot **preferujeme konec** (teoreticky by to mělo být jedno)

Metoda půlení intervalu

Nechť nyní $N = 2k$. Položme $a_0 = a$, $b_0 = b$ a $x_i^- := \frac{a_{i-1} + b_{i-1}}{2} - \delta$ a $x_i^+ := \frac{a_{i-1} + b_{i-1}}{2} + \delta$, kde $\delta > 0$ je dostatečně malé a $i = 1, \dots, k$. Vyčíslíme funkci v x_i^- , x_i^+ , tj. dostaneme $f(x_i^-)$, $f(x_i^+)$. Pak

- jestliže $f(x_i^-) < f(x_i^+)$, pak podle **Lemma** 3.1.2 je **ILM** $[a_{i-1}, x_i^+]$ $\implies a_i = a_{i-1}, b_i = x_i^+$
- jestliže $f(x_i^-) > f(x_i^+)$, pak podle **Lemma** 3.1.2 je **ILM** $[x_i^-, b_{i-1}]$ $\implies a_i = x_i^-, b_i = b_{i-1}$

Takto můžeme tento proces opakovat (k -krát, jelikož máme $N = 2k$ povolených vyčíslení), kdy za a, b volíme krajní body **ILM** pro každý krok. Zřejmě, jako aproximaci x^* v k -tém kroku bereme **střed ILM** pro k -tý krok.

Délka **ILM** je v tomto případě $|I_k| = \frac{b-a}{2^k} + \frac{(2^k - 1)\delta}{2^{k-1}}$, přičemž $\delta \in [0, \frac{b-a}{2}]$ a navíc pro $k \rightarrow \infty$ je $|I_k| \rightarrow 2\delta$.

“ Z tohoto vyplývá, že čím menší δ , tím je metoda přesnější. Nicméně ve skutečnosti se můžeme dostat k zaokrouhlovacím chybám, které dokonce mohou způsobit, že špatně určíme velikosti $f(x_i^-)$, $f(x_i^+)$ (tím pádem bychom řekli, že x^* je v opačném intervalu, než je ve skutečnosti)

Tato metoda konverguje **lineárně** s rychlostí $1/2$.

“ Při rovnosti funkčních hodnot **zapomínáme konec** (teoreticky by to mělo být jedno)

Metoda zlatého řezu

Myšlenka metody zlatého řezu "vylepšuje" metodu půlení intervalu tak, že každá další iterace umožňuje pouze **jedno** další vyčíslení.

“ Zde τ je řešení rovnice $\tau^2 - \tau - 1 = 0$, tj. $\frac{1}{\tau} \approx 0.618$

Mějme funkci f , interval $[a, b]$, přesnost ϵ nebo počet vyčíslení $N \geq 2$:

- (Inicializace) Položíme $a_0 := a$, $b_0 := b$ a $k := 1$. Vypočteme
$$\mu_1 := a_0 + \frac{b_0 - a_0}{\tau^2} \quad \text{and} \quad \mu_1 := a_0 + \frac{b_0 - a_0}{\tau}$$
- Je-li $k = N$, pokračujeme částí 5., jinak následuje krok 3.
- Vyčíslíme $f(\mu_k)$ a $f(\mu_k)$. Jestliže $f(\mu_k) \geq f(\mu_k)$:
 - Položíme $a_k := \mu_k$, $b_k = b_{k-1}$, $\mu_{k+1} := \mu_k$ a
$$f(\mu_{k+1}) := f(\mu_k), \quad \mu_{k+1} := a_k + \frac{b_k - a_k}{\tau}$$
 a pokračujeme na krok 4.
 - Položíme $a_k := a_{k-1}$, $b_k := \mu_k$, $\mu_{k+1} := \mu_k$ a
$$f(\mu_{k+1}) := f(\mu_k), \quad \mu_{k+1} := a_k + \frac{b_k - a_k}{\tau^2}$$
 a pokračujeme na krok 4.
- Položíme $k := k+1$ a pokračujeme krokem 2.
- Stanovíme poslední ILM jako $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ a vypočteme $\bar{x} := \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$. **KONEC**

Tato metoda konverguje **lineárně** s rychlostí $\frac{1}{\tau} \approx 0.618$

“ Toto **neznamená**, že by **na stejný počet vyčíslení** byla tato metoda horší než [metoda půlení intervalu](#)

Průběh MZŘ s výchozím intervalem $I = [a_0, b_0]$ s délkou $\ell_0 := b_0 - a_0$.

i (i + 1 vyčíslení)	vzdálenost od a_{i-1} (b_{i-1})		délka ILM
	λ_i (μ_i)	μ_i (λ_i)	
1	ℓ_0/τ^2	ℓ_0/τ	ℓ_0/τ
2	ℓ_0/τ^3	ℓ_0/τ^2	ℓ_0/τ^2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
N – 1	ℓ_0/τ^N	ℓ_0/τ^{N-1}	ℓ_0/τ^{N-1}

Fibonacciho metoda

V této poslední metodě uvažujme, že zkrácení δ může být **jiné** v každé kroku metody.

“ Necht F_n je n -té Fibonacciho číslo

Máme povoleno N vyčíslení, takže $M = N - 1$ a $\lambda_i = a_{i-1} + \{F_{N-i-1} \over F_{N-i+1}\} l_{i-1} = b_{i-1} - \{F_{N-1} \over F_{N-1+i}\} l_{i-1}$
 $\mu_i = a_{i-1} + \{F_{N-1} \over F_{N-1+i}\} l_{i-1} = b_{i-1} - \{F_{N-i-1} \over F_{N-i+1}\} l_{i-1}$

Průběh FM s výchozím intervalem $I = [a_0, b_0]$ s délkou $\ell_0 := b_0 - a_0$.

i (i + 1 vyčíslení)	vzdálenost od a _{i-1} (b _{i-1})		délka ILM
	λ_i (μ_i)	μ_i (λ_i)	
1	$\frac{F_{N-2}}{F_N} \ell_0$	$\frac{F_{N-1}}{F_N} \ell_0$	$\frac{F_{N-1}}{F_N} \ell_0$
2	$\frac{F_{N-3}}{F_N} \ell_0$	$\frac{F_{N-2}}{F_N} \ell_0$	$\frac{F_{N-2}}{F_N} \ell_0$
⋮	⋮	⋮	⋮
i	$\frac{F_{N-i-1}}{F_N} \ell_0$	$\frac{F_{N-i}}{F_N} \ell_0$	$\frac{F_{N-i}}{F_N} \ell_0$
⋮	⋮	⋮	⋮
N - 2	$\frac{1}{F_N} \ell_0$	$\frac{2}{F_N} \ell_0$	$\frac{2}{F_N} \ell_0$
N - 1 & $\delta > 0$	$\frac{1}{F_N} \ell_0$	$\frac{1}{F_N} \ell_0 + \delta$	$\frac{1}{F_N} \ell_0$ nebo $\frac{1}{F_N} \ell_0 + \delta$
N - 1 & $\delta < 0$	$\frac{1}{F_N} \ell_0 + \delta$	$\frac{1}{F_N} \ell_0$	$\frac{1}{F_N} \ell_0$ nebo $\frac{1}{F_N} \ell_0 + \delta $

Tato metoda konverguje **lineárně** s rychlostí $\frac{1}{\tau} \approx 0.618$, tj. *stejně* jako [metoda zlatého řezu](#)

“ Fibonacciho metoda je (*mírně*) přesnější, než *metoda zlatého řezu* (která lze vnímat jako *limitní varianta* Fibonacciho metody). Nicméně u Fibonacciho metody je při změně N potřeba **všechny body přepočítat**, což u metody zlatého řezu **není**.