

Konvexní množiny

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|} \xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}} \xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\tagged#1{(\text{#1})} \xdef\tagged*#1{\text{#1}} \xdef\tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}} \xdef\tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}} \xdef\tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}\,, #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\,, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}\,, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\,, #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\,, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\,, #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}\,, #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\,, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}\,, #1} \xdef\hess#1{\nabla^2\,, #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}\,, #1} \xdef\iter#1{^{\{#1\}}} $$
```

Definice $\mathcal{D}\{1.1\}$ (Konvexní množina)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Množina X se nazývá **konvexní**, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in X$ a pro každé $\lambda \in [0,1]$ platí $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in X$ \tag{KM}

“ Speciálně prázdnou množinu \emptyset považujeme za **konvexní**

Operace nad konvexními množinami

Mějme $X_i, i \in I$ konvexní množiny. Potom

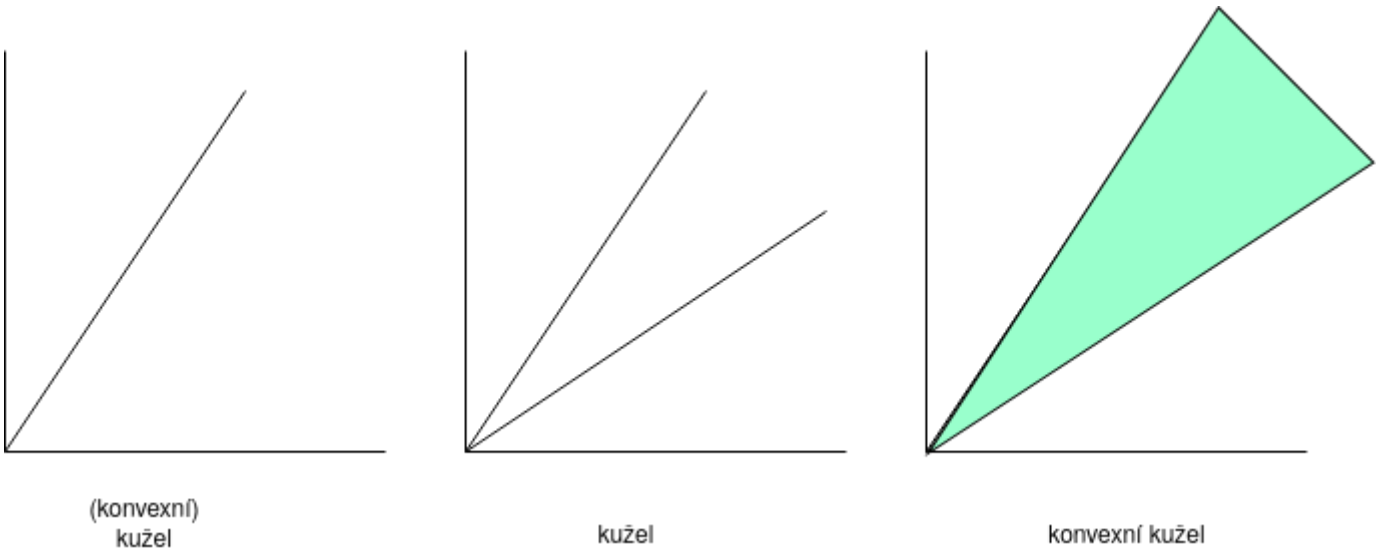
- jejich sjednocení $\bigcup_{i \in I} X_i$ je konvexní množina
- jejich **součet** $X_1 + \dots + X_m = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \text{ pro nějaká } x_i \in X_i\}$ je opět **konvexní**

Vlastnosti konvexních množin

Definice $\mathcal{D}\{2.1.3\}$ (Speciální množiny)

Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá

- **kužel**, jestliže pro každé $x \in X$ a pro každé $\lambda \in [0, \infty)$ je také $\lambda x \in X$
- **konvexní kužel**, jestliže je množina X konvexní a současně **kuželem**
- **afinní**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in X$ a pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$



“ **Polyedr** je **mnohostěn** v \mathbb{R}^n . Dále **ohraničený polyedr** nazveme **polytop**

Dále si rozeberme různé kombinace bodů

Definice $\{2.1.4\}$ (Lineární kombinace)

Nechť $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Lineární kombinace $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$ se nazývá

- **konvexní**, jestliže $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ a $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$
- **nezáporná**, jestliže $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$
- **afinní**, jestliže $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Tedy jistě platí

- Množina obsahující všechny lineární kombinace libovolných dvou svých bodů (tj. s libovolnými dvěma body obsahuje i přímku procházející těmito body a počátek) je **vektorový (lineární) prostor**
- Množina obsahující všechny afinní kombinace libovolných dvou svých bodů (tj. s libovolnými dvěma body obsahuje i přímku procházející těmito body) je **afinní**
- Množina obsahující všechny nezáporné kombinace libovolných dvou svých bodů (tj. s libovolnými dvěma body obsahuje i celou výšeč určenou polopřímkami vycházejícími z počátku a procházejícími těmito body) je **konvexní kužel**
- Množina obsahující všechny konvexní kombinace dvou libovolných svých bodů (tj. s libovolnými dvěma body obsahuje i celou úsečku je spojující) je **konvexní**

Definice 2.1.6 (Obaly)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$

- průnik všech konvexních množin obsahujících množinu X se nazývá **konvexní obal** množiny X a značí se $\text{conv } X$.
- průnik všech konvexních *kuželů* obsahujících množinu X se nazývá **kónický obal** množiny X a značí se $\text{cone } X$.
- průnik všech *afinních* množin obsahujících množinu X se nazývá **afinní obal** množiny X a značí se $\text{aff } X$. Jeho *zaměření* se nazývá **lineární obal** množiny X a značí se $\text{lin } X$. **Dimenze** afinního obalu množiny X se značí $\dim X$ a klademe $\dim X := \dim \{\text{lin } X\}$.

“ Všimněme si, že $\text{span } X = \{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \mid x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{R} \}$, ale $\text{lin } X = \text{span} \{x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_m - x_1\}$. (pro $X = \{x_1, \dots, x_m\}$) Viz obrázek z přednášky

“ Jinak řečeno, **konvexní obal** je nejmenší konvexní množina obsahující X ve smyslu množinové inkluze.
Kónický obal je nejmenší *konvexní kužel* obsahující X atd..

Jako **simplex** definujeme **konvexní obal** $n+1$ **afinně nezávislých** bodů $v_1, \dots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^m$, kde $m \geq n$. Pod pojmem **afinně nezávislé** body rozumíme, že vektory $v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_{n+1} - v_1$ jsou **lineárně nezávislé**.

Věta 2.1.7

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak platí

- $\text{conv } X = \{x \mid x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i, \text{ kde } m \in \mathbb{N} \text{ je libovolné}, x_1, \dots, x_m \in X, \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$
- $\text{cone } X = \{x \mid x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i, \text{ kde } m \in \mathbb{N} \text{ je libovolné}, x_1, \dots, x_m \in X, \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0\}$
- $\text{aff } X = \{x \mid x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i, \text{ kde } m \in \mathbb{N} \text{ je libovolné}, x_1, \dots, x_m \in X, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$

Libovolný bod x v **konvexní kuželu** v \mathbb{R}^n lze vyjádřit pomocí **nezáporné kombinace** n bodů

Věta $\mathcal{D}\{2.1.9\}$ (Caratheódoryho)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Každý bod konvexního obalu $\text{conv } X$ může být vyjádřen jako konvexní kombinace nejvýše $n+1$ prvků množiny X , tj. pro $x \in \text{conv } X$ existují $x_1, \dots, x_{n+1} \in X$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$ splňující $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ taková, že $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}$

“ **POZOR: Univerzální konvexní báze** (stejná pro všechny $x \in \text{conv } X$) konvexního obalu $\text{conv } X$ **nemusí existovat!**

Lze ukázat, že pokud $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je **kompaktní** množina, pak $\text{conv } X$ je **také kompaktní**.

“ To stejné **neplatí** o uzavřenosti.

Zobecnění vnitřku množiny

Definice $\mathcal{D}\{2.1.11\}$ (Relativně vnitřní bod)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Bod $x^* \in X$ se nazývá **relativně vnitřním** bodem množiny X , jestliže existuje okolí $O(x^*)$ bodu x^* takové, že $O(x^*) \cap \text{aff } X \subseteq X$. Množinu všech *relativně vnitřních* bodů nazýváme **relativním vnitřkem** množiny X a značíme $\text{ri } X$.

Množina $\text{rd } X := \overline{X} \setminus \text{ri } X$ se nazývá **relativní hranice** množiny X .

“ Jistě platí $\text{interior } X \subseteq \text{ri } X$
a také $\text{ri } X \subseteq X \subseteq \overline{X} \subseteq \text{aff } X$

Platí $\overline{\text{ri } X} = \overline{X}$, tj. **relativní vnitřek** je dost velký na vygenerování **uzávěru**.