Konvexní množiny

$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\lVert #1 \right\rVert} \xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&}\xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}} \xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix}#1\end{pmatrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mcal#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}}\xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\a{\alpha} \xdef\tagged#1{(\text{#1})} \xdef\tagged*#1{\text{#1}} \xdef\tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}} \xdef\tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}} \xdef\tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}\, #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}\, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\, #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\, #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}\, #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}\, #1} \xdef\hess#1{\nabla^2\, #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}\, #1} \xdef\iter#1{^{[#1]}} $$

Definice $\D{1.1}$ (Konvexní množina)

Nechť $X \subseteq \R^n$. Množina X se nazývá **konvexní**, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in X$ a pro každé $\l \in [0,1]$ platí $$ \l x_1 + (1 - \l) x_2 \in X \tag{KM} $$

> Speciálně prázdnou množinu $\emptyset$ považujeme za **konvexní**

Operace nad konvexními množinami

Mějme $X_i, i \in I$ konvexní množiny. Potom

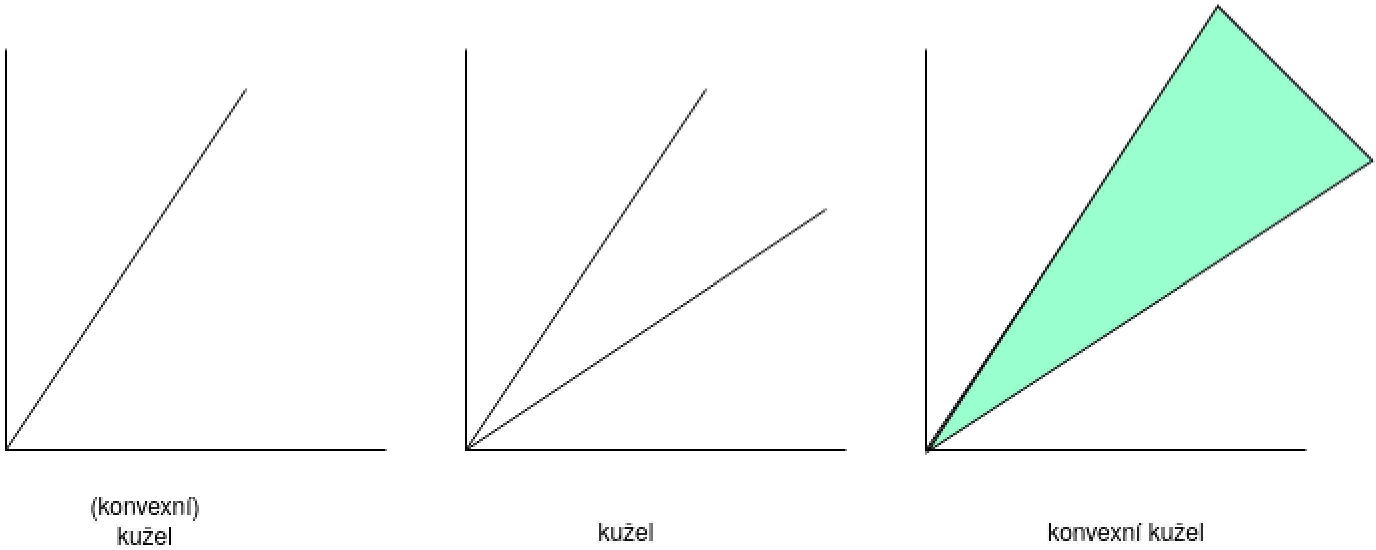
- jejich sjednocení $\bigcap_{i \in I} X_i$ je konvexní množina
- jejich **součet** $\a_1 X_1 + \dots + \a_m X_m = \brackets{x \in \R^n \mid x = \displaystyle \sum_{i = 1}^m \a_i x_i \text{ pro nějaká } x_i \in X_i}$ je opět **konvexní**

Vlastnosti konvexních množin

Definice $\D{2.1.3}$ (Speciální množiny)

Množina $X \subseteq \R^n$ se nazývá

- **kužel**, jestliže pro každé $x \in X$ a pro každé $\l \in [0, \infty)$ je také $\l x \in X$
- **konvexní kužel**, jestliže je množina X konvexní a současně **kuželem**
- **afinní**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in X$ a pro každé $\l \in \R$ platí $$ \l x_1 + (1 - \l)x_2 \in X $$



> **Polyedr** je **mnohostěn** v $\R^n$. Dále **ohraničený polyedr** nazveme **polytop**
> .

Dále si rozeberme různé kombinace bodů

Definice $\D{2.1.4}$ (Lineární kombinace)

Nechť $x_1, \dots, x_m \in \R^n$. Lineární kombinace $\l_1 x_1 + \dots + \l_m x_m$ se nazývá

- **konvexní**, jestliže $\l_1, \dots, \l_m \geq 0$ a $\sum_{i = 1}^m \l_i = 1$
- **nezáporná**, jestliže $\l_1, \dots, \l_m \geq 0$
- **afinní**, jestliže $\sum_{i = 1}^m \l_i = 1$.

Tedy jistě platí

- Množina obsahující všechny linearní kombinace libovolných dvou svých bodů (tj. s libovolnými dvěma body obsahuje i přímku procházející těmito body a počátek) je **vektorový (lineární) prostor**
- Množina obsahující všechny afinní kombinace libovolných dvou svých bodů (tj. s libovolnými dvěma body obsahuje i přímku procházející těmito body) je **afinní**
- Množina obsahující všechny nezáporné kombinace libovolných dvou svých bodů (tj. s libovolnými dvěma body obsahuje i celou výšeč určenou polopřímkami vycházejícími z počátku a procházejícími těmito body) je **konvexní kužel**
- Množina obsahující všechny konvexní kombinace dvou libovolných svých bodů (tj. s libovolnámi dvěma body obsahuje i celou úsečku je spojující) je **konvexní**

Definice $\D{2.1.6}$ (Obaly)

Nechť $X \subseteq \R^n$

- průnik všech konvexních množin obsahujících množinu X se nazývá **konvexní obal** množiny X a značí se $\conv X$.
- průnik všech konvexních *kuželů* obsahujících množinu X se nazývá **kónický obal** množiny X a značí se $\cone X$.
- průnik všech *afinních* množin obsahujících množin X se nazývá **afinní obal** množiny X a značí se $\aff X$. Jeho *zaměření* se nazývá **lineární obal** množiny X a značí se $\lin X$. **Dimenze** afinního obalu množiny X se značí $\dim X$ a klademe $\dim X := \dim {\lin X}$.

> Všimněme si, že $\span X = \{$ $\forall$ lineární kombinace prvků z X $\}$, ale $\lin X = \span \brackets{x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_m - x_1}$. (pro $X = \set{x_1, \dots, x_m}$) Viz obrázek z přednášky

> Jinak řečeno, **konvexní obal** je nejmenší konvexní množina obsahující X ve smyslu množinové inkluze.
> **Kónický obal** je nejmenší *konvexní kužel* obsahující X atd..

Jako **simplex** definujeme **konvexní** obal $n+1$ **afinně nezávislých** bodů $v_1, \dots, v_{n+1} \in \R^m$, kde $m \geq n$. Pod pojmem **afinně nezávislé** body rozumíme, že vektory $$ v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_{n+1} - v_1 $$ jsou **lineárně nezávislé**.

Věta $\D{2.1.7}$

Nechť $X \subseteq \R^n$. Pak platí

- $\conv X = \brackets{x \mid x = \displaystyle\sum_{i = 1}^m \l_i x_i, \text{ kde } m \in \N \text{ je libovolné}, x_1, \dots, x_m \in X, \l_1, \dots, \l_m \geq 0, \sum_{i = 1}^m \l_i = 1}$
- $\cone X = \brackets{x \mid x = \displaystyle\sum_{i = 1}^m \l_i x_i, \text{ kde } m \in \N \text{ je libovolné}, x_1, \dots, x_m \in X, \l_1, \dots, \l_m \geq 0}$
- $\aff X = \brackets{x \mid x = \displaystyle\sum_{i = 1}^m \l_i x_i, \text{ kde } m \in \N \text{ je libovolné}, x_1, \dots, x_m \in X, \l_1, \dots, \l_m \in \R, \sum_{i = 1}^m \l_i = 1}$

> Libovolný bod x v **konvexní kuželu** v $\R^n$ lze vyjádřit pomocí **nezáporné kombinace** n bodů

Věta $\D{2.1.9}$ (Caratheódoryho)

Nechť $X \subseteq \R^n$. Každý bod konvexního obalu $\conv X$ může být vyjádřen jako konvexní kombinace nejvýše $n+1$ prvků množiny X, tj. pro $x \in X$ existují $x_1, \dots, x_{n+1} \in X$ a $\l_1, \dots, \l_{n+1} \geq 0$ splňující $\sum_{i = 1}^{n+1} \l_i = 1$ taková, že $$ x = \l_1 x_1 + \dots + \l_{n+1} x_{n+1} $$

> **POZOR: Univerzální konvexní báze** (stejná pro všechny $x \in \conv X$) konvexního obalu $\conv X$ **nemusí existovat**!

Lze ukázat, že pokud $X \subseteq \R^n$ je **kompaktní** množina, pak $\conv X$ je **také kompaktní**.

> To stejné **neplatí** o uzavřenosti.

Zobecnění vnitřku množiny

Definice $\D{2.1.11}$ (Relativně vnitřní bod)

Nechť $X \subseteq \R^n$. Bod $x^* \in X$ se nazývá **relativně vnitřním** bodem množiny X, jestliže existuje okolí $\O(x^*)$ bodu $x^* $ takové, že $$ \O(x^*) \cap \aff X \subseteq X $$
Množinu všech *relativně vnitřních* bodů nazýváme **relativním vnitřkem** množiny X a značíme $\ri X$.
Množina $\rd X := \overline X \setminus \ri X$ se nazývá **relativní hranice** množiny X.

> Jistě platí $\interior X \subseteq \ri X$
> a také $\ri X \subseteq X \subseteq \overline X \subseteq \aff X$

Platí $\overline {\ri X} = \bar X$, tj. **relativní vnitřek** je dost velký na vygenerování **uzávěru**.

Revision #29
Created 21 December 2022 21:40:07 by Admin
Updated 6 January 2023 10:31:44 by Sceptri