

Konvexní funkce

\$\$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|} \xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}} \xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\tagged#1{\text{#1}} \xdef\tagEq#1{\href{#eq-#1}{\text{#1}}} \xdef\tagDe#1{\href{#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1 \xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1 \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1 \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1 \xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1 \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1 \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial}, #1 \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1 \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1 \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1 \xdef\hess#1{\nabla^2}, #1} \$\$

Definice $\S D{2.2.1}$ (Konvexní funkce)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je **konvexní** množina. Funkce $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá

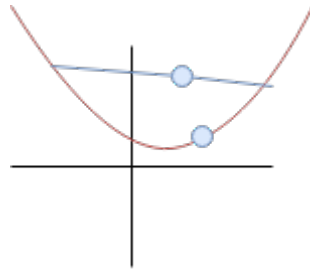
- **konvexní** na X , jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in X$ a každé $\lambda \in [0,1]$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \tag{T{2.2.1}}$$
- **ostře konvexní** na X , jestliže nerovnost $\tag{2.2.1}$ je **ostrá** pro všechna $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0,1)$.
- **silně konvexní** na X s **konstantou silné konvexnosti** $\theta > 0$, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in X$ a každé $\lambda \in [0,1]$ platí
$$\underbrace{f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)}_{\tag{2.2.1}} - \lambda(1 - \lambda)\|x_1 - x_2\|^2 \tag{T{2.2.2}}$$

“ V praxi je **silná** konvexnost "silnější" než **ostrá** konvexnost a ta je silnější než "obyčejná" konvexnost

Věta $\S D{2.2.2}$ (Konvexnost nadgrafu)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a nechť $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Funkce f je **konvexní** na X právě tehdy, když její **nadgraf (epigraf)** $\text{epi } f := \{(x, \beta) \mid x \in X, \beta \geq f(x)\}$ je **konvexní** množina.

Pro **ostře** konvexní funkci musí "tyto dva body" vždy ležet nad sebou (myšleny jejich souřadnice na ose y). Navíc pro **silnou** konvexnost mezi nimi musí vždy být alespoň daná mezera.



“ Tyto body **nemusí** ležet nad sebou (na svislé přímce). Navíc ještě

f **konvexní** $\iff -f$ **konkávni**

Kombinace konvexních funkcí

Věta $\{2.2.3\}$ (Nezáporná lineární kombinace konvexních funkcí)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, funkce $f_1, \dots, f_m: X \rightarrow \mathbb{R}$ jsou konvexní na X a $a_1, \dots, a_m \geq 0$ jsou daná čísla. Potom $F(x) = a_1 f_1(x) + \dots + a_m f_m(x)$ je **konvexní**.

Věta $\{2.2.4\}$ (Sublevel set)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je *konvexní* funkce na X . Pak pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ je odpovídající **dolní vrstevnicová množina (sublevel set)** $V_K := \{x \in X \mid f(x) \leq K\}$ také **konvexní**.

“ Platí pouze tato implikace: f **konvexní** \implies sublevel set **konvexní**
Například x^3 má konvexní sublevel set, ale sama konvexní **není**.

Přesněji říkáme, že pokud má funkce f **konvexní sublevel set**, pak f je **kvazikonvexní**.

Věta $\{2.2.5\}$ (Jensen)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní na X . Pak pro libovolné $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_m \in X$ a čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ splňující $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ platí $f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i)$.
 $\{2.2.3\}$ Je-li navíc funkce f **ostře konvexní** a $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in (0,1)$, pak rovnost v $\{2.2.3\}$ nastane *právě tehdy*, když $x_1 = \dots = x_m$.

První část **Věty** $\tagDe{2.2.5}$ lze jistě podle **Definice** $\tagDe{2.2.1}$ nahradit ekvivalencí

“ Z Jensenovy nerovnosti $\tagEq{2.2.3}$ lze odvodit například **AG nerovnost**
$$\frac{x_1 + \dots + x_m}{m} \leq \sqrt[m]{x_1 \cdot \dots \cdot x_m}$$

Lokalizace minima konvexní funkce

Věta $\tagD{2.2.6}$

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ konvexní. Potom následující tvrzení jsou pravdivá

- Libovolné **lokální minimum** funkce f na X je současně **globálním minimem**.
- Množina bodů množiny X , v nichž funkce f nabývá svého **minima** na X , je **konvexní**. Je-li funkce dokonce **ostře konvexní**, pak je tato množina **nejvýše jednovýbová**.
- Je-li funkce f **diferencovatelná** na **otevřené** množině $U \subseteq X$ a $x^* \in U$ je jejím **stacionárním bodem**, tj. $\nabla f(x^*) = 0$, pak x^* je bodem **globálního minima** funkce f na množině X .

Z Věty $\tagD{2.2.6}$ mimo jiné plyne, že je-li $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (*ostře*) konvexní a **spojitá** funkce na konvexní a **kompaktní** množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$, pak f má na X (*právě jedno*) **globální minimum**.

Věta $\tagD{2.2.7}$ (Základní věta konvexního programování)

Máme-li konvexní funkci $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ na polytopu $X := \text{conv}\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, pak je maximum funkce f na X dosaženo v některém z bodů x_1, \dots, x_m .

Obecněji: je-li X konvexní a **kompaktní** množina, pak maximum nastává v **extrémním bodě** (tj. v takovém bodě, který **není netriviální** konvexní kombinací dvou bodů z X)

“ Z Věty $\tagD{2.2.7}$ plyne **základní věta lineárního programování**:
Je-li funkce f **afinní** (taková funkce je konvexní i konkávní zároveň), pak **globální maximum** nastává v některém z bodů x_1, \dots, x_m , tj. v některém z "**vrcholů**" polytopu.

Vlastnosti konvexních funkcí

Věta 2.4.1 (Spojitost konvexní funkce)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní na X . Pak f je **spojitá** pro každé $x \in \text{int } X$.

Dále ještě známe několik podmínek zaručujících konvexnost funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- má-li f vlastní derivaci v **otevřeném** intervalu I , pak f je (ostře) konvexní na I právě tehdy, když f' je **neklesající (rostoucí)** na I .
- má-li f vlastní derivaci v **otevřeném** intervalu I , pak f je (ostře) konvexní na I právě tehdy, když pro každé $x, x^* \in I$ platí $f(x) \geq f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*)$, tj. graf funkce f leží **nad tečnou** sestrojenou v **libovolném** bodě.
- má-li f vlastní **druhou** derivaci v **otevřeném** intervalu I , pak f je konvexní na I právě tehdy, když funkce $f''(x) \geq 0$ (je-li $f''(x) > 0$ na I , pak **ostře konvexní**).

Tyto tvrzení si nyní rozšíříme pro $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pro **silnou** konvexnost s konstantnou θ (volbou $\theta = 0$ dostáváme **ostrou** konvexnost)

Věta 2.4.2

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce f diferencovatelná na otevřené množině $\text{int } X$. Pak f je **silně** konvexní na X s konstantou **silné** konvexnosti $\theta \geq 0$ právě tehdy, když pro každé $x, x^* \in X$ platí $f(x) \geq f(x^*) + \langle \text{grad } f(x^*), x - x^* \rangle + \frac{\theta}{2} \|x - x^*\|^2$ (2.4.1)

Ve výrazu $\langle \text{grad } f(x^*), x - x^* \rangle$ hraje úlohu **tečné nadroviny** v bodě x^* s **normálovým vektorem** $\text{grad } f(x^*)$ (tečným jak na nadrovinu, tak na funkci f v bodě x^*)

Ještě jinými slovy je z Věty 2.4.2 plyne, že nadrovina daná $\langle \text{grad } f(x) - \text{grad } f(x^*), x - x^* \rangle \geq \theta \|x - x^*\|^2$ **opěrnou nadrovinou** pro f

Důsledek 2.4.5

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina splňující $\text{int } X \neq \emptyset$. Nechť funkce $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je **dvakrát** spojitě diferencovatelná na **otevřené** množině $\text{int } X$ s maticí druhých derivací $\text{Hess } f(x)$ (*Hessova matice*). Pak f je **silně** konvexní na X s konstantou silné konvexnosti $\theta \geq 0$ právě tehdy, když pro každé $x \in X$ a $h \in \mathbb{R}^n$

platí $\|\text{hess } f(x)\|_h \geq 2 \|\text{h}\|^2$ $\tag{T{2.4.3}}$, jinými slovy $\text{hess } f(x) \geq 2I$ pro všechna $x \in X$.

Z Důsledku $\tag{De{2.4.5}}$ plynou následující tři implikace

- $\text{hess } f(x) \geq 0$ pro všechna $x \in X$ $\implies f$ je konvexní na X
 - $\text{hess } f(x) > 0$ pro všechna $x \in X$ $\implies f$ je **ostře** konvexní na X
 - $\text{interior } X \neq \emptyset$ a f je konvexní na X $\implies \text{hess } f(x) \geq 0$ pro všechna $x \in X$
-

Revision #23

Created 30 December 2022 12:20:12 by Sceptri

Updated 7 June 2023 11:06:01 by Sceptri