

Konvexní funkce

$\$ \$ \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{scal} \# 1 \# 2 \{ \backslash \mathrm{langle} \# 1, \# 2 \backslash \mathrm{rangle} \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{norm} \# 1 \{ \backslash \mathrm{left} \backslash \mathrm{Vert} \# 1 \backslash \mathrm{right} \backslash \mathrm{rVert} \}$
 $\backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{dist} \{ \backslash \mathrm{rho} \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{and} \{ \& \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{brackets} \# 1 \{ \backslash \mathrm{left} \{ \# 1 \backslash \mathrm{right} \} \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{parc} \# 1 \# 2 \{ \backslash \mathrm{frac} \{ \backslash \mathrm{partial} \# 1 \} \{ \backslash \mathrm{partial} \# 2 \} \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{mtr} \# 1 \{ \backslash \mathrm{begin} \{ \mathrm{pmatrix} \} \# 1 \backslash \mathrm{end} \{ \mathrm{pmatrix} \} \}$
 $\backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{bm} \# 1 \{ \backslash \mathrm{boldsymbol} \{ \# 1 \} \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{mcal} \# 1 \{ \backslash \mathrm{mathcal} \{ \# 1 \} \}$
 $\backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{vv} \# 1 \{ \backslash \mathrm{mathbf} \{ \# 1 \} \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{vvp} \# 1 \{ \backslash \mathrm{pmb} \{ \# 1 \} \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{ve} \{ \backslash \mathrm{varepsilon} \} \backslash \mathrm{def} \backslash \{ \backslash \mathrm{lambda} \}$
 $\backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{th} \{ \backslash \mathrm{vartheta} \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{a} \{ \backslash \mathrm{alpha} \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{tagged} \# 1 \{ \{ \backslash \mathrm{text} \{ \# 1 \} \} \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{tagEq} \# 1 \{ \backslash \mathrm{href} \{ \# \mathrm{eq} \# 1 \} \{ \backslash \mathrm{text} \{ \# 1 \} \} \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{tagDe} \# 1 \{ \backslash \mathrm{href} \{ \# \mathrm{de} \# 1 \} \{ \backslash \mathrm{text} \{ \# 1 \} \} \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{T} \# 1 \{ \backslash \mathrm{htmlId} \{ \mathrm{eq} \# 1 \} \{ \# 1 \} \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{D} \# 1 \{ \backslash \mathrm{htmlId} \{ \mathrm{de} \# 1 \} \{ \backslash \mathrm{vv} \{ \# 1 \} \} \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{conv} \# 1 \{ \backslash \mathrm{mathrm} \{ \mathrm{conv} \} \backslash, \# 1 \}$
 $\backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{cone} \# 1 \{ \backslash \mathrm{mathrm} \{ \mathrm{cone} \} \backslash, \# 1 \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{aff} \# 1 \{ \backslash \mathrm{mathrm} \{ \mathrm{aff} \} \backslash, \# 1 \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{lin} \# 1 \{ \backslash \mathrm{mathrm} \{ \mathrm{Lin} \} \backslash, \# 1 \}$
 $\backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{span} \# 1 \{ \backslash \mathrm{mathrm} \{ \mathrm{span} \} \backslash, \# 1 \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{O} \{ \backslash \mathrm{mathcal} \mathrm{O} \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{ri} \# 1 \{ \backslash \mathrm{mathrm} \{ \mathrm{ri} \} \backslash, \# 1 \}$
 $\backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{rd} \# 1 \{ \backslash \mathrm{mathrm} \{ \mathrm{r} \} \backslash \mathrm{partial} \backslash, \# 1 \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{interior} \# 1 \{ \backslash \mathrm{mathrm} \{ \mathrm{int} \} \backslash, \# 1 \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{proj} \{ \backslash \mathrm{Pi} \}$
 $\backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{epi} \# 1 \{ \backslash \mathrm{mathrm} \{ \mathrm{epi} \} \backslash, \# 1 \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{grad} \# 1 \{ \backslash \mathrm{mathrm} \{ \mathrm{grad} \} \backslash, \# 1 \} \backslash \mathrm{def} \backslash \mathrm{hess} \# 1 \{ \backslash \mathrm{nabla} ^ 2 \backslash, \# 1 \} \$ \$$

Definice $\S D\{2.2.1\}$ (Konvexní funkce)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je **konvexní** množina. Funkce $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá

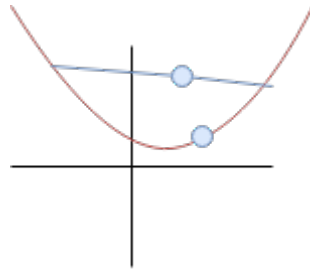
- **konvexní** na X , jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in X$ a každé $\lambda \in [0, 1]$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \tag{T\{2.2.1\}}$$
- **ostře konvexní** na X , jestliže nerovnost $\tag{Eq\{2.2.1\}}$ je **ostrá** pro všechna $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0, 1)$.
- **silně konvexní** na X s **konstantou silné konvexnosti** $\theta > 0$, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in X$ a každé $\lambda \in [0, 1]$ platí
$$\underbrace{f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)}_{\tag{Eq\{2.2.1\}}} - \lambda(1 - \lambda)\|x_1 - x_2\|^2 \tag{T\{2.2.2\}}$$

“ V praxi je **silná** konvexnost "silnější" než **ostrá** konvexnost a ta je silnější než "obyčejná" konvexnost

Věta $\S D\{2.2.2\}$ (Konvexnost nadgrafu)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a nechť $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Funkce f je **konvexní** na X právě tehdy, když její **nadgraf (epigraf)** $\mathrm{epi} f := \{ [x, \beta] \mid x \in X, \beta \geq f(x) \}$ je **konvexní** množina.

Pro **ostře** konvexní funkci musí "tyto dva body" vždy ležet nad sebou (myšleny jejich souřadnice na ose y). Navíc pro **silnou** konvexnost mezi nimi musí vždy být alespoň daná mezera.



“ Tyto body **nemusí** ležet nad sebou (na svislé přímce). Navíc ještě

f **konvexní** $\iff -f$ **konkávní**

Kombinace konvexních funkcí

Věta $\{2.2.3\}$ (Nezáporná lineární kombinace konvexních funkcí)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, funkce $f_1, \dots, f_m: X \rightarrow \mathbb{R}$ jsou konvexní na X a $a_1, \dots, a_m \geq 0$ jsou daná čísla. Potom $F(x) = a_1 f_1(x) + \dots + a_m f_m(x)$ je **konvexní**.

Věta $\{2.2.4\}$ (Sublevel set)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je *konvexní* funkce na X . Pak pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ je odpovídající **dolní vrstevnicová množina (sublevel set)** $V_K := \{x \in X \mid f(x) \leq K\}$ také **konvexní**.

“ Platí pouze tato implikace: f **konvexní** \implies sublevel set **konvexní**
Například x^3 má konvexní sublevel set, ale sama konvexní **není**.

Přesněji říkáme, že pokud má funkce f **konvexní sublevel set**, pak f je **kvazikonvexní**.

Věta $\{2.2.5\}$ (Jensen)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní na X . Pak pro libovolné $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_m \in X$ a čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ splňující $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ platí $f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i)$.
 $\{2.2.3\}$ Je-li navíc funkce f **ostře konvexní** a $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in (0,1)$, pak rovnost v $\{2.2.3\}$ nastane *právě tehdy*, když $x_1 = \dots = x_m$.

První část **Věty** $\tagDe{2.2.5}$ lze jistě podle **Definice** $\tagDe{2.2.1}$ nahradit ekvivalencí

“ Z Jensenovy nerovnosti $\tagEq{2.2.3}$ lze odvodit například **AG nerovnost**
$$\frac{x_1 + \dots + x_m}{m} \leq \sqrt[m]{x_1 \cdot \dots \cdot x_m}$$

Lokalizace minima konvexní funkce

Věta $\tagD{2.2.6}$

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ konvexní. Potom následující tvrzení jsou pravdivá

- Libovolné **lokální minimum** funkce f na X je současně **globálním minimem**.
- Množina bodů množiny X , v nichž funkce f nabývá svého **minima** na X , je **konvexní**. Je-li funkce dokonce **ostře konvexní**, pak je tato množina **nejvýše jednovýbová**.
- Je-li funkce f **diferencovatelná** na **otevřené** množině $U \subseteq X$ a $x^* \in U$ je jejím **stacionárním bodem**, tj. $\nabla f(x^*) = 0$, pak x^* je bodem **globálního minima** funkce f na množině X .

Z Věty $\tagD{2.2.6}$ mimo jiné plyne, že je-li $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (*ostře*) konvexní a **spojitá** funkce na konvexní a **kompaktní** množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$, pak f má na X (*právě jedno*) **globální minimum**.

Věta $\tagD{2.2.7}$ (Základní věta konvexního programování)

Máme-li konvexní funkci $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ na polytopu $X := \text{conv}\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, pak je maximum funkce f na X dosaženo v některém z bodů x_1, \dots, x_m .

Obecněji: je-li X konvexní a **kompaktní** množina, pak maximum nastává v **extrémním bodě** (tj. v takovém bodě, který **není netriviální** konvexní kombinací dvou bodů z X)

“ Z Věty $\tagD{2.2.7}$ plyne **základní věta lineárního programování**:
Je-li funkce f **afinní** (taková funkce je konvexní i konkávní zároveň), pak **globální maximum** nastává v některém z bodů x_1, \dots, x_m , tj. v některém z "**vrcholů**" polytopu.

Vlastnosti konvexních funkcí

Věta 2.4.1 (Spojitost konvexní funkce)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní na X . Pak f je **spojitá** pro každé $x \in \text{int } X$.

Dále ještě známe několik podmínek zaručujících konvexnost funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- má-li f vlastní derivaci v **otevřeném** intervalu I , pak f je (ostře) konvexní na I právě tehdy, když f' je **neklesající (rostoucí)** na I .
- má-li f vlastní derivaci v **otevřeném** intervalu I , pak f je (ostře) konvexní na I právě tehdy, když pro každé $x, x^* \in I$ platí $f(x) \geq f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*)$, tj. graf funkce f leží **nad tečnou** sestrojenou v **libovolném** bodě.
- má-li f vlastní **druhou** derivaci v **otevřeném** intervalu I , pak f je konvexní na I právě tehdy, když funkce $f''(x) \geq 0$ (je-li $f''(x) > 0$ na I , pak **ostře konvexní**).

Tyto tvrzení si nyní rozšíříme pro $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pro **silnou** konvexnost s konstantnou θ (volbou $\theta = 0$ dostáváme **ostrou** konvexnost)

Věta 2.4.2

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce f diferencovatelná na otevřené množině $\text{int } X$. Pak f je **silně** konvexní na X s konstantou **silné** konvexnosti $\theta \geq 0$ právě tehdy, když pro každé $x, x^* \in X$ platí $f(x) \geq f(x^*) + \langle \text{grad } f(x^*), x - x^* \rangle + \frac{\theta}{2} \|x - x^*\|^2$ (tag 2.4.1)

Ve výraz $\langle \text{grad } f(x^*), x - x^* \rangle$ hraje úlohu **tečné nadroviny** v bodě x^* s **normálovým vektorem** $\text{grad } f(x^*)$ (tečným jak na nadrovinu, tak na funkci f v bodě x^*)

Ještě jinými slovy je z Věty 2.4.2 plyne, že nadrovina daná $\langle \text{grad } f(x) - \text{grad } f(x^*), x - x^* \rangle \geq \theta \|x - x^*\|^2$ **opěrnou nadrovinou** pro f

Důsledek 2.4.5

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina splňující $\text{int } X \neq \emptyset$. Nechť funkce $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je **dvakrát** spojitě diferencovatelná na **otevřené** množině $\text{int } X$ s maticí druhých derivací $\text{Hess } f(x)$ (*Hessova matice*). Pak f je **silně** konvexní na X s konstantou silné konvexnosti $\theta \geq 0$ právě tehdy, když pro každé $x \in X$ a $h \in \mathbb{R}^n$

platí $\|\text{hess } f(x)\|_h \geq 2 \|h\|^2$ $\tag{T{2.4.3}}$, jinými slovy $\text{hess } f(x) \geq 2 I$ pro všechna $x \in X$.

Z Důsledku $\tag{De{2.4.5}}$ plynou následující tři implikace

- $\text{hess } f(x) \geq 0$ pro všechna $x \in X$ $\implies f$ je konvexní na X
 - $\text{hess } f(x) > 0$ pro všechna $x \in X$ $\implies f$ je **ostře** konvexní na X
 - $\text{interior } X \neq \emptyset$ a f je konvexní na X $\implies \text{hess } f(x) \geq 0$ pro všechna $x \in X$
-

Revision #23

Created 30 December 2022 12:20:12 by Sceptri

Updated 7 June 2023 11:06:01 by Sceptri