Konvexní funkce

$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\lVert #1 \right\rVert} \xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&}\xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}} \xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix}#1\end{pmatrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mcal#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}}\xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\a{\alpha} \xdef\tagged#1{(\text{#1})} \xdef\tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}} \xdef\tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlId{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlId{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}\, #1} \xdef\cone#1{\mathrm{cone}\, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}\, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\, #1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\, #1} \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}\, #1} \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}\, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}\, #1} \xdef\hess#1{\nabla^2\, #1} $$

Definice $\D{2.2.1}$ (Konvexní funkce)

Nechť $X \subseteq \R^n$ je **konvexní** množina. Funkce $f: X \to \R$ se nazývá

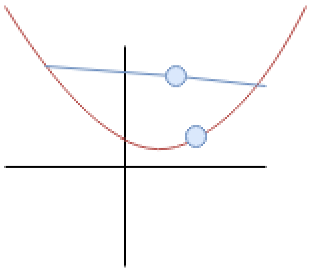
- **konvexní** na X, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in X$ a každé $\l \in [0,1]$ platí $$f(\l x_1 + (1 - \l)x_2) \leq \l f(x_1) + (1-\l) f(x_2) \tag{\T{2.2.1}}$$
- **ostře konvexní** na X, jestliže nerovnost $\tagEq{2.2.1}$ je **ostrá** pro všechna $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ a každé $\l \in (0,1)$.
- **silně konvexní** na X s **konstantou silné konvexnosti** $\th > 0$, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in X$ a každé $\l \in [0,1]$ platí $$\underbrace{f(\l x_1 + (1 - \l)x_2) \leq \l f(x_1) + (1 - \l) f(x_2)}_{\tagEq{2.2.1}} - \th \l(1-\l)\norm{x_1 - x_2}^2 \tag{\T{2.2.2}}$$

> V praxi je **silná** konvexnost "silnější" než **ostrá** konvexnost a ta je silnější než "*obyčejná*" konvexnost

Věta $\D{2.2.2}$ (Konvexnost nadgrafu)

Nechť $X \subseteq \R^n$ je *konvexní* množina a nechť $f : X \to \R$. Funkce f je **konvexní** na X právě tehdy, když její **nadgraf** (**epigraf**) $$ \epi f := \brackets{\underbrace{[x, \beta]}_{\text{bod}} \in \R^{n+1} \mid x \in X, \beta \geq f(x)} $$ je **konvexní** množina.

Pro **ostře** konvexní funkci musí "tyto dva body" vždy ležet nad sebou (myšleny jejich souřadnice na ose y). Navíc pro **silnou** konvexnost mezi nimi musí vždy být alespoň daná mezera.



> Tyto body **nemusí** ležet nad sebou (na svislé přímce). Navíc ještě
>
> f **konvexní** $\iff$ $-f$ **konkávní**

Kombinace konvexních funkcí

Věta $\D{2.2.3}$ (Nezáporná linearní kombinace konvexních funkcí)

Nechť $X \subseteq \R^n$ je konvexní množina, funkce $f_1, \dots, f_m: X \to \R$ jsou konvexní na X a $\a_1, \dots, \a_m \geq 0$ jsou daná čísla. Potom $F(x) = \a_1 f_1(x) + \dots + \a_m f_m(x)$ je **konvexní**.

Věta $\D{2.2.4}$ (*Sublevel set*)

Nechť $X \subseteq \R^n$ je konvexní množina a $f: X \to \R$ je *konvexní* funkce na X. Pak pro libovolné $K \in \R$ je odpovídající **dolní vrstevnicová množina** (***sublevel set***) $$ V_K := \brackets{x \in X \mid f(x) \leq K} $$ také **konvexní**.

> Platí pouze tato implikace: f ***konvexní*** $\implies$ *sublevel set* ***konvexní***
> Například x^3 má konvexní *sublevel set*, ale sama konvexní **není**.

Přesněji říkáme, že pokud má funkce f **konvexní** *sublevel set*, pak f je **kvazikonvexní**.

Věta $\D{2.2.5}$ (Jensen)

Nechť $X \subseteq \R^n$ je konvexní množina a funkce $f:X \to \R$ je konvexní na X. Pak pro libovolné $m \in \N, x_1, \dots, x_m \in X$ a čísla $\l_1, \dots, \l_m \geq 0$ splňující $\sum_{i = 1}^m \l_i = 1$ platí $$ f \left(\sum_{i = 1}^m \l_i x_i \right) \leq \sum_{i = 1}^m \l_i f(x_i). \tag{\T{2.2.3}} $$ Je-li navíc funkce f **ostře konvexní** a $\l_1, \dots, \l_m \in (0,1)$, pak rovnost v $\tagEq{2.2.3}$ nastane *právě tehdy*, když $x_1 = \dots = x_m$.

> První část **Věty** $\tagDe{2.2.5}$ lze jistě podle **Definice** $\tagDe{2.2.1}$ nahradit ekvivalencí

> Z Jensenovy nerovnosti $\tagEq{2.2.3}$ lze odvodit například **AG nerovnost** $${x_1 + \dots + x_m \over m} \leq \sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_m}$$

Lokalizace minima konvexní funkce

Věta $\D{2.2.6}$

Nechť $X \subseteq \R^n$ je konvexní množina a funkce $f: X \to \R$ konvexní. Potom následující tvrzení jsou pravdivá

- Libovolné **lokální minimum** funkce f na X je současně **globálním minimem**.
- Množina bodů množiny X, v nichž funkce f nabývá svého **minima** na X, je **konvexní**. Je-li funkce dokonce **ostře konvexní**, pak je tato množina **nejvýše jednoprvková**.
- Je-li funkce f **diferencovatelná** na **otevřené** množině $\mcal U \supseteq X$ a $x^* \in X$ je jejím **stacionárním bodem**, tj. $\grad f(x^*) = 0$, pak $x^* $ je bodem **globálního minima** funkce f na množině X.

Z Věty $\tagDe{2.2.6}$ mimo jiné plyne, že je-li $f: X \to \R$ (*ostře*) konvexní a **spojitá** funkce na konvexní a **kompaktní** množině $X \subseteq \R^n$, pak f má na X (*právě jedno*) **globální minumum**.

Věta $\D{2.2.7}$ (Základní věta konvexního programování)

Máme-li konvexní funkci $f: X \to \R$ na polytopu $X := \conv \brackets{x_1, \dots, x_m} \subseteq \R^n$, pak je maximum funkce f na X dosaženo v některém z bodů $x_1, \dots, x_m$.

Obecněji: je-li X konvexní a **kompaktní** množina, pak maximum nastává v **extrémním bodě** (tj. v takovém bodě, který **není netriviální** konvexní kombinací dvou bodů z X)

> Z Věty $\tagDe{2.2.7}$ plyne **základní věta lineárního programování**:
> Je-li funkce f **afinní** (taková funkce je konvexní i konkávní zároveň), pak **globální maximum** nastává v některém z bodů $x_1, \dots, x_m$, tj. v některém z **"vrcholů" polytopu**.

Vlastnosti konvexních funkcí

Věta $\D{2.4.1}$ (Spojitost konvexní funkce)

Nechť $X \subseteq \R^n$ je konvexní množina a funkce $f: X \to \R$ je konvexní na X. Pak f je **spojitá** pro každé $x \in \ri X$.

Dále ještě známe několik podmínek zaručujících konvexnost funkce $f: \R \to \R$:

- má-li f *vlastní* derivaci v **otevřeném** intervalu I, pak f je (*ostře*) konvexní na I právě tehdy, když f' je **neklesající** (***rostoucí***) na I.
- má-li f *vlastní* derivaci v **otevřeném** intervalu I, pak f je (*ostře*) konvexní na I právě tehdy, když pro každé $x, x^* \in I$ platí $$f(x) \geq^{(>)} f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*),$$ tj. graf funkce f leží **nad tečnou** sestrojenou v **libovolném** bodě.
- má-li f vlastní **druhou** derivaci v **otevřeném** intervalu I, pak f je konvexní na I právě tehdy, když funkce $f''(x) \geq 0$ (je-li $f''(x) > 0$ na I, pak **ostře konvexní**)

Tyto tvrzení si nyní rozšiřme pro $f: \R^n \to \R$ pro **silnou** konvexnost s konstatnou $\th$ (volbou $\th = 0$ dostáváme **ostrou** konvexnost)

Věta $\D{2.4.2}$

Nechť $X \subseteq \R^n$ je konvexní množina a funkce f diferencovatelná na otevřené množině $\mcal U \supseteq X$. Pak f je **silně** konvexní na X s konstantou **silné** konvexnosti $\th \geq 0$ právě tehdy, když pro každé $x, x^* \in X$ platí $$ f(x) \geq f(x^*) + \scal {\grad f(x^*)} {x - x^* } + \th \norm{x - x^* }^2 \tag{\T{2.4.1}} $$

> Ve $\tagEq{2.4.1}$ výraz $\scal {\grad f(x^*)} {x - x^* }$ hraje úlohu **tečné nadroviny** v bodě $x^* $ s **normálovým vektorem** $\grad f(x^*)$ (tečným jak na nadrovinu, tak na funkci f v bodě $x^* $)
>
> Ještě jinými slovy je z Věty $\tagDe{2.4.2}$ plyne, že nadrovina daná $\scal {\grad f(x) - \grad f(x^*)} {x - x^* } \geq \th \norm{x - x^* }^2$ **opěrnou nadrovinou** pro $\epi f$

Důsledek $\D{2.4.5}$

Nechť $X \subseteq \R^n$ je konvexní množina splňující $\interior X \neq \emptyset$. Nechť funkce $f: X \to \R$ je *dvakrát* spojitě diferencovatelná na **otevřené** množině $\mcal U \supseteq X$ s maticí druhých derivací $\hess f(x)$ (*Hessova matice*). Pak f je **silně** konvexní na X s konstantou silné konvexnosti $\th \geq 0$ právě tehdy, když pro každé $x \in X$ a $h \in \R^n$

platí $$ \scal {\hess f(x)} h \geq 2 \th \norm{h}^2 \tag{\T{2.4.3}}, $$ jinými slovy $\hess f(x) \geq 2 \th I$ pro všechna $x \in X$.

Z Důsledku $\tagDe{2.4.5}$ plynou následující tři implikace

- $\hess f(x) \geq 0$ pro všechna $x \in X \implies f$ je konvexní na X
- $\hess f(x) > 0$ pro všechna $x \in X \implies f$ je **ostře** konvexní na X
- $\interior X \neq \emptyset$ a f je konvexní na $X \implies \hess f(x) \geq 0$ pro všechna $x \in X$

Revision #23
Created 30 December 2022 12:20:12 by Sceptri
Updated 7 June 2023 11:06:01 by Sceptri