

Duální úloha

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\| \right. #1 \right\|} \xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}} \xdef\parc#1#2{\frac {\partial #1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1 \end{pmatrix}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda} \xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})} \xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlld{eq-#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1 \xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1 \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1 \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}}, #1 \xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1 \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1 \xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial}, #1 \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1 \xdef\proj{\Pi} \xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1 \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1 \xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1} \xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1 \xdef\iter#1{^{\{#1\}}} \xdef\str{^*} \xdef\spv{\mc V} \xdef\civ{\mc U} \xdef\knvxProg{\tagEqHere{4.1}{./nutne-a-postacujici-podminky-optimality}} \, \, \, \, \, \tagEqHere{4.2}{nutne-a-postacujici-podminky-optimality}} $$
```

Definice $\text{D}\{4.3.1\}$ (Kuhnovy-Tuckerovy vektory)

Vektor $y \in Q$ (*prvních k složek je nezáporných*) se nazývá **Kuhnovým-Tuckerovým** vektorem (**K-T** vektorem) úlohy knvxProg , jestliže $f(x) + \sum_{i=1}^m y_i g_i(x) = L(x, y) \quad \forall x \in P, \tag{T\{4.3.0\}}$ kde $f(x) := \inf_{x \in X} f(x)$ je hodnota úlohy knvxProg .

“ **K-T** vektor pro danou úlohu **nemusí** existovat

Věta $\text{D}\{4.3.2\}$

Nechť úloha knvxProg je úlohou **konvexního programování**, tj. množina $P \subseteq \mathbb{R}^n$ je **konvexní**, funkce f, g_1, \dots, g_k **konvexní** a g_{k+1}, \dots, g_m jsou **afinní**, a nechť dále platí (*alespoň*) jedna z podmínek **regularity**:

1. **(Slaterova)** $k = m$ a existuje $\bar{x} \in P$ takové, že $g_i(\bar{x}) < 0$ pro $i = 1, \dots, m$

2. **(lineární)** množina P je **polyedr**, funkce f, g_1, \dots, g_k jsou **afinní** a $X \neq \emptyset$.

Pak **existuje K-T** vektor úlohy knvxProg .

“ Zde se podmínka 2. liší od podmínky 3. ve **Větě 4.2.3** - vyžaduje ještě **neprázdnot** přípustné množiny

Úloha konvexního programování splňující nějakou z podmínek z Věty 4.3.2 se nazývá **regulární**.

Definice 4.3.3 (Duální úloha)

Nechť $y \in Q$. Definujme funkci
$$\varphi(y) := \inf_{x \in P} L(x, y) = \inf_{x \in P} \left(f(x) + \sum_{i=1}^m y_i g_i(x) \right)$$
 a množinu (tzv. **efektivní definiční obor**) $Y := \{y \in Q \mid \varphi(y) > -\infty\}$. Pak úloha $\varphi(y) \rightarrow \max, y \in Y$ se nazývá **duální úlohou** k úloze knvxProg . Číslo $\varphi^* := \sup_{y \in Y} \varphi(y)$ se nazývá **hodnotou duální úlohy**.

Úloha 4.3.1 je úlohou **konkávního** programování, tj. množina Y je **konvexní** a funkce φ je **konkávní** na Y .

Věta 4.3.5 (Slabá věta o dualitě)

Pro každé $x \in X$ a každé $y \in Q$ platí $f(x) \geq \varphi(y)$. Zejména, pokud $X \neq \emptyset$ a $Y \neq \emptyset$, pak $\varphi^* \leq f^*$.

“ V případě $X = \emptyset$ a/nebo $Y = \emptyset$ je nerovnost splněna *triviálně*, neboť $\inf \emptyset = -\infty$ a $\sup \emptyset = -\infty$.

Věta 4.3.5 říká, že pro **duální rozdíl** g (*duality gap*) s $x \in X \neq \emptyset$ a $y \in Y \neq \emptyset$ bude platit $g(x, y) := f(x) - \varphi(y) \geq 0$. Navíc číslo $g(x^*, y^*) := f^* - \varphi^*$ udává tzv. **optimální duální rozdíl** (*optimal duality gap*). Dá se také říct, že pro libovolné $y \in Q$ je hodnota $\varphi(y)$ **dolní hranicí minima účelové** funkce úlohy knvxProg .

Certifikát optimality

Jsou-li $x^* \in X$ a $y^* \in Q$ taková, že platí $f(x^*) = \varphi(y^*)$, pak x^* a y^* jsou **optimálními řešeními** svých příslušných úloh.

Duální rozdíl je úzce spjat s **existencí K-T vektorů**. Jestliže je duální rozdíl **nenulový**, tj. $f^* > v^*$, pak **množina K-T vektorů musí být prázdná**.

“ Jinak řečeno, **existence K-T** vektorů zaručuje $f^* = v^*$

Věta 4.3.6 (Silná věta o dualitě)

Nechť úloha knvxProg je **regulární úlohou** konvexního programování (viz. Věta 4.3.2). Pokud $f^* > -\infty$, pak platí tzv. **vztah duality** $f^* = v^*$, tj. $\inf_{x \in P} \sup_{y \in Q} L(x,y) = \sup_{y \in Q} \inf_{x \in P} L(x,y)$, přičemž množina řešení duální úlohy 4.3.1 je **neprázdná a shodná** s množinou všech **K-T vektorů** úlohy knvxProg .

Z Věty 4.3.6 vyplývá, že pokud knvxProg je **regulární úlohou konvexního programování** (viz Věta 4.3.2) a

- 1. jestliže $Y \neq \emptyset$, pak **duální úloha je řešitelná** a $f^* > -\infty$
- 2. jestliže $Y = \emptyset$, pak $f^* = -\infty$

Celkem z Vět 4.3.5, 4.3.6 a z bezprostředně výše uvedeného důsledku vyplývá, že v případě **regulární úlohy konvexního programování** mohou nastat **pouze 2** možnosti

Duální Ú. \ Primární Ú.	Nepřípustná ($f^* = -\infty$)	Přípustná a Omezená	Neomezená ($f^* = -\infty$)
Neomezená ($v^* = \infty$)	NE (Ano bez regularity)	NE	NE
Přípustná a Omezená	NE (Možná bez regularity)	ANO	NE
Nepřípustná ($v^* = -\infty$)	NE (Ano bez regularity)	NE	ANO

“ Z **regularity** plyne, že $X \neq \emptyset$

Věta 4.3.8 (Kuhnova-Tuckerova v nediferenciálním tvaru)

Nechť úloha knvxProg je **regulární úlohou konvexního programování** (viz Věta 4.3.2). Pak $x^* \in X$ je řešením této úlohy právě tehdy, když platí (*alespoň*) jedna z podmínek:

- 1. existuje $y^* \in Q$ takové, že $f(x^*) = v(y^*)$

2. existuje $y \in Q$ takové, že

$$L(x, y) = \min_{x \in P} L(x, y), \quad g_i(x) = 0,$$

$\forall i \in \{1, \dots, m\}$. Navíc množina takovýchto vektorů $y \in Q$ **splývá** s množinou **řešení duální** úlohy (a podle Věty 4.3.6 tedy i s množinou **K-T vektorů** úlohy KvxProg).

“ Jsou-li navíc funkce f, g_1, \dots, g_m **diferencovatelné** v bodě x , pak podmínka 4.3.2 je **ekvivalentní** s podmínkou 4.2.3 {./nutne-a-postacujici-podminky-optimality} **pro** $y_0 = 1$, zatímco 4.3.3 **odpovídá** 4.2.4 {./nutne-a-postacujici-podminky-optimality}.

Tedy Věta 4.3.8 je skutečně **zobecnění KKT Věty** 4.2.3 {./nutne-a-postacujici-podminky-optimality} pro případ **nediferencovatelných** funkcí

Také se dá říct, že koncept **K-T vektorů** je **zobecněním Lagrangeových multiplikátorů** s **kvalifikovanými omezeními** (kvůli $y_0 = 1$) - **K-T vektory splývají s multiplikátory** za podmínek Věty 4.2.3 {./nutne-a-postacujici-podminky-optimality}

Definice 4.3.9 (Sedlový bod)

Bod $(x, y) \in P \times Q$ se nazývá **sedlovým bodem** Lagrangeovy funkce $L(x, y)$ úlohy KvxProg na $P \times Q$, jestliže $L(x, y) \leq L(x, y) \leq L(x, y) \quad \forall x \in P, y \in Q$, tj. platí $L(x, y) = \max_{y \in Q} L(x, y) = \min_{x \in P} L(x, y)$

Věta 4.3.10 (Kuhnova-Tuckerova pro sedlový bod)

Nechť úloha KvxProg je **regulární úlohou** konvexní programování (viz Věta 4.3.2). Pak bod $(x, y) \in P \times Q$ je **řešením** úlohy KvxProg právě tehdy, když **existuje** $y \in Q$ takové, že (x, y) je **sedlovým bodem** Lagrangeovy funkce $L(x, y)$ úlohy KvxProg na $P \times Q$.