

# Analýza citlivosti

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\|Vert #1 \right\|rVert}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}} \xdef\parc#1#2{\frac {\partial
#1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1\end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\a{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-
#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlld{eq-
#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}\,, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}\,, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}\,, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}\,,
#1} \xdef\span#1{\mathrm{span}\,, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}\,, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial\,, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}\,, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}\,, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}\,, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2\,, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}\,, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{[#1]}} \xdef\str{\wedge^*} \xdef\spv{\mc{V}} \xdef\civ{\mc{U}}
\xdef\knvxProg{\tagEqHere{4.1}{./nutne-a-postacujici-podminky-optimality} \,, \and \,,
\tagEqHere{4.2}{nutne-a-postacujici-podminky-optimality}} $$
```

Nyní se budeme věnovat řešení úlohy matematické programování v **závislosti na parametru**.

První se podíváme na úlohu matematické programování **s omezeními pouze ve tvaru rovností**, ale s obecnou závislostí na parametrech.

A v druhém (a posledním) případě se podíváme na úlohu **s omezeními ve tvaru nerovností**, ale s parametry **pouze** v podobě **absolutních členů** ve funkcích zadávajících tyto omezení.

“ Zde je dobré podotknout, že druhý případ je mírně užitečnější a navíc si uvědomme, že **1 rovnost lze napsat jako 2 nerovnosti**

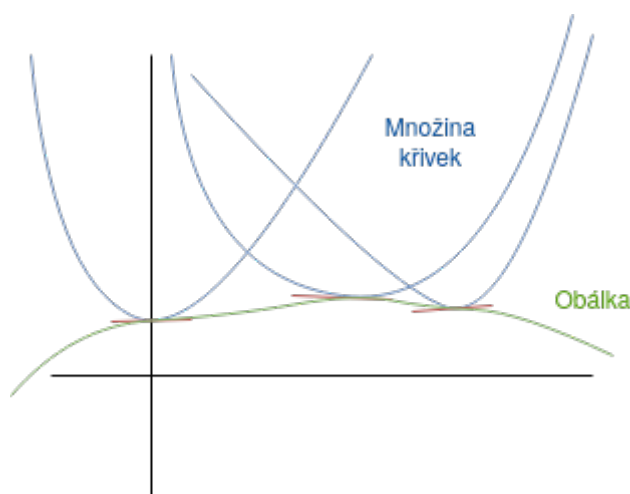
## Úlohy s rovnostmi

**Věta**  $\S\{4.4.1\}$  (O obálce)

Mějme úlohu  $f(x,r) \rightarrow \min, \text{qquad} g_1(x,r) = 0, \dots, g_m(x,r) = 0 \tag{AC.1}$  kde  $x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^k, f, g_1, \dots, g_m \in C^1$ . Pripusťme, že pro **každou hodnotu parametru**  $r$  má úloha  $\tag{AC.1}$  **jediné řešení**, které označíme  $x^*(r)$ . Potom **hodnota úlohy**  $\tag{AC.1}$  je  $f^*(r) = f(x^*(r), r)$ . Je-li  $x^*(r)$  **diferencovatelná** vzhledem k  $r$  a **Jacobiho matice**  $G(x^*(r), r) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  má **plnou hodnost**  $m$ , pak platí  $\frac{\partial f^*(r)}{\partial r_i} = \frac{\partial f}{\partial r_i}(x^*(r), r) + \sum_{j=1}^m y_j(r) \frac{\partial g_j}{\partial r_i}(x^*(r), r)$

Obálka je křivka, která se **množiny křivek dotýká** (tj. se dotýká každé křivky) a má společnou tečnu s danou křivkou

Jinak řečeno je **tečná** k množině **křivek**



Požadavky Věty  $\tag{4.4.1}$  jsou relativně silné, proto uveďme její "slabší verzi".

## Věta $\tag{4.4.2}$

Nechť  $f, g_1, \dots, g_m \in C^2$  a  $x^*$  je **lokálním řešením** úlohy  $f(x) \rightarrow \min, \text{qquad} g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$  s odpovídajícími Lagrangeovými multiplikátory  $y^*$ . Nechť dále tato dvojice splňuje **postačující podmínku druhého řádu**, tj.  $\text{hess}_x L(x^*, y^*) > 0$  na  $\ker G(x^*)$ , přičemž současně  $x^*$  je **regulárním bodem**, tj.  $G(x^*) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  má **plnou hodnost**  $m$ . Uvažme úlohu **parametrického programování**  $f(x) \rightarrow \min, \text{qquad} G(x) = u \tag{AC.2}$ , pro parametr  $u \in \mathbb{R}^m$ . Pak **existuje otevřená koule**  $S$  se **středem v počátku** ( $u = 0$ ) taková, že pro každé  $u \in S$  existuje **lokální řešení**  $x^*(u) \in \mathbb{R}^n$  úlohy  $\tag{AC.2}$  a odpovídající  $y^*(u) \in \mathbb{R}^m$ . Navíc  $x^*(\cdot)$  a  $y^*(\cdot)$  jsou **spojitě diferencovatelné** funkce na  $S$  a platí  $x^*(0) = x^*, y^*(0) = y^*$  a pro každé  $u \in S$  máme  $\text{grad} f^*(u) = -y^*(u)$ , kde  $f^*(u)$  značí **optimální hodnotu úlohy**  $\tag{AC.2}$  vzhledem k  $u$ , tj. klademe  $f^*(u) := f(x^*(u))$ .

Jednoduše řečeno se optimální hodnota mění **podle Lagrangeových multiplikátorů** pro danou hodnotu  $u$

## Úlohy s nerovnostmi

Uvažujme úlohu závislou na  $m$ -tici parametrů  $b = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$ , tj.  $f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X(b) := \{x \in P \mid g_i(x) \leq b_i, \quad i \in \{1, \dots, m\}\}$   $\tag{T{4.4.2}}$   $A$  dále zavedme značení  $G(x) := (g_1(x), \dots, g_m(x))^T, \quad X(b) := \{x \in P \mid G(x) \leq b\}$   $B := \{b \in \mathbb{R}^m \mid X(b) \neq \emptyset\}, \quad F(b) := \inf_{x \in X(b)} f(x), \quad b \in B$  množinu **K-T vektorů** úlohy  $\tag{4.4.2}$  označme  $Y(b) := \{y \in \mathbb{R}^m \mid y \geq 0, \quad F(b) \leq f(x) + \sum_{i=1}^m y_i (G_i(x) - b_i) \quad \forall x \in P\}$  a **subdiferenciál** funkce  $F(b)$  (viz Definice  $\tag{2.5.1}$  [./subgradient-a-subdiferencial-a-fenchelova-transformace](#)) označme  $\text{subdif } F(b) := \{a \in \mathbb{R}^m \mid F(b') - F(b) \leq \sum_{i=1}^m a_i (b'_i - b_i) \quad \forall b' \in B\}$

### Věta $\tag{4.4.3}$

Nechť množina  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  je **konvexní**, funkce  $f, g_1, \dots, g_m$  jsou **konvexní** na  $P$  a platí  $0 \in B, F(0) > -\infty$  a  $Y(0) \neq \emptyset$ . Potom

- množina  $B$  je **konvexní**
- funkce  $F(b)$  je **konečná, konvexní a nerostoucí** na  $B$
- platí  $\text{subdif } F(b) = -Y(b)$  pro **všechna**  $b \in B$

“ Z předpokladů Věty  $\tag{4.4.3}$  plyne, že

- úloha  $\tag{4.4.2}$  je **přípustná** pro  $b = 0$
- úloha  $\tag{4.4.2}$  **má řešení** pro  $b = 0$
- množina **K-T vektorů** úlohy  $\tag{4.4.2}$  je **neprázdná** (toto **není** splněno automaticky, viz Věta  $\tag{4.3.2}$  [./dualni-uloha](#))

Navíc je-li  $F$  dokonce **diferencovatelná** v  $b$ , pak  $\text{subdif } F(b)$  je **jednoprvková** množina, která obsahuje **pouze**  $-\text{grad } F(b)$  a tedy tento vektor musí být roven  $(-1) \cdot$  **jediný K-T vektor** této úlohy. (Toto je analogie Věty *O obálce*  $\tag{4.4.1}$ )

“ Podle Věty  $\tag{4.3.6}$  [./dualni-uloha](#) jsme popsali **K-T vektory** úlohy  $\text{knvxProg}$  pomocí řešení **duální úlohy**  $\tag{4.3.1}$  [./dualni-uloha](#). Část 3. této věty jim navíc dává ještě charakteristiku **subgradientu**

## hodnoty úlohy parametrického programování $\tag{4.4.2}$

“ V případě **regulární** úlohy *konvexního programování* dostáváme zkombinováním těchto dvou výsledků  $\text{subdif } F(b) = -Y(b)$ , kde  $Y(b)$  je množina řešení **duální úlohy** (viz Věta [4.3.6](#) [./dualni-uloha](#)).

Pomocí Věty [4.4.3](#) jsme schopni dostat zajímavé výsledky o původní úloze *matematického programování*, tj.  $s = 0$ .

**Důsledek  $\$D\{4.4.4\}$**

Nechť množina  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  je **konvexní**, funkce  $f, g_1, \dots, g_m$  jsou **konvexní** na  $P$ , platí  $F(0) > -\infty$  a **existuje**  $\bar{x} \in P$  takové, že  $G(\bar{x}) < 0$  (viz **Slaterova podmínka** ve Větě [4.3.2](#)). Potom  $0 \in B$  a

1. funkce  $F(\cdot)$  je **spojitá** v bodě  $b = 0$
2. pro libovolné  $h \in \mathbb{R}^m$  **existuje jednostranná směrová** derivace
$$F'_h(0) = \max_{\|y\| \leq 1} \langle \nabla F(0), y \rangle$$
3. funkce  $F$  je **diferencovatelná** v bodě  $b = 0$  právě tehdy, když  $Y(0)$  je **jednoprvková** množina, tj.  $Y(0) = \{y\}$ . Navíc platí  $\nabla F(0) = -y$ .

“ Z části 3. okamžitě plyne, že pokud **existuje více K-T vektorů**  $\iff$  funkce  $F$  **není diferencovatelná**

# Fenchelova transformace a duální úloha

Lze ukázat, že pro  $F(b)$  **hodnotu primární úlohy** je  $F^*(y) = -\inf(y)$  a tedy duální úlohu  $\tag{4.3.1} \{ \dots \}$  je možné psát jako  $\max_{y \geq 0} -F^*(y)$