

Analýza citlivosti

```
$$ \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\norm#1{\left\|Vert #1 \right\|rVert}
\xdef\dist{\rho} \xdef\and{\&} \xdef\brackets#1{\left\{ #1 \right\}} \xdef\parc#1#2{\frac {\partial
#1}{\partial #2}} \xdef\mtr#1{\begin{pmatrix} #1\end{pmatrix}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\mc#1{\mathcal{#1}}
\xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\l{\lambda}
\xdef\th{\vartheta} \xdef\alpha{\alpha} \xdef\vf{\varphi} \xdef\Tagged#1{(\text{#1})}
\xdef>tagged*#1{\text{#1}} \xdef>tagEqHere#1#2{\href{#2\#eq-#1}{(\text{#1})}}
\xdef>tagDeHere#1#2{\href{#2\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef>tagEq#1{\href{\#eq-
#1}{(\text{#1})}} \xdef>tagDe#1{\href{\#de-#1}{\text{#1}}} \xdef\T#1{\htmlld{eq-
#1}{#1}} \xdef\D#1{\htmlld{de-#1}{\vv{#1}}} \xdef\conv#1{\mathrm{conv}}, #1}
\xdef\cone#1{\mathrm{cone}}, #1} \xdef\aff#1{\mathrm{aff}}, #1} \xdef\lin#1{\mathrm{Lin}},
#1} \xdef\span#1{\mathrm{span}}, #1} \xdef\O{\mathcal O} \xdef\ri#1{\mathrm{ri}}, #1}
\xdef\rd#1{\mathrm{r}\partial, #1} \xdef\interior#1{\mathrm{int}}, #1} \xdef\proj{\Pi}
\xdef\epi#1{\mathrm{epi}}, #1} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}}, #1}
\xdef\gradT#1{\mathrm{grad}^T #1} \xdef\gradx#1{\mathrm{grad}_x #1}
\xdef\hess#1{\nabla^2, #1} \xdef\hessx#1{\nabla^2_x #1} \xdef\jacobx#1{D_x #1}
\xdef\jacob#1{D #1} \xdef\subdif#1{\partial #1} \xdef\co#1{\mathrm{co}}, #1}
\xdef\iter#1{\wedge^{[#1]}} \xdef\str{\wedge^*} \xdef\spv{\mc{V}} \xdef\civ{\mc{U}}
\xdef\knvxProg{\tagEqHere{4.1}{./nutne-a-postacujici-podminky-optimality} \, \, \text{and} \,
\tagEqHere{4.2}{nutne-a-postacujici-podminky-optimality}} $$
```

Nyní se budeme věnovat řešení úlohy matematické programování v **závislosti na parametru**.

První se podíváme na úlohu matematické programování **s omezeními pouze ve tvaru rovností**, ale s obecnou závislostí na parametrech.

A v druhém (a posledním) případě se podíváme na úlohu **s omezeními ve tvaru nerovností**, ale s parametry **pouze** v podobě **absolutních členů** ve funkcích zadávajících tyto omezení.

“ Zde je dobré podotknout, že druhý případ je mírně užitečnější a navíc si uvědomme, že **1 rovnost lze napsat jako 2 nerovnosti**

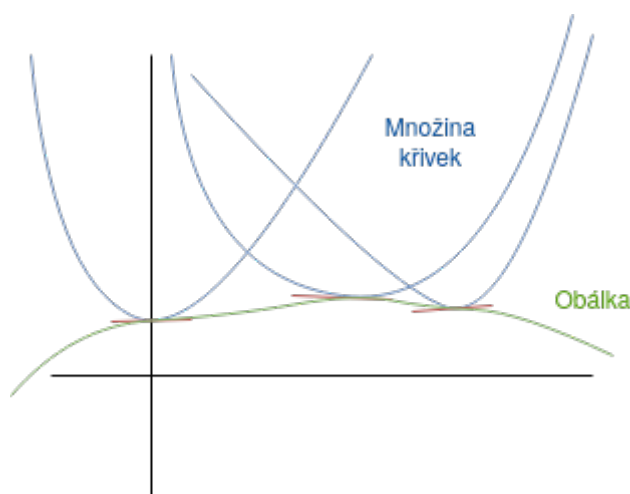
Úlohy s rovnostmi

Věta $\S\{4.4.1\}$ (O obálce)

Mějme úlohu $f(x,r) \rightarrow \min, \text{qquad} g_1(x,r) = 0, \dots, g_m(x,r) = 0 \tag{AC.1}$ kde $x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^k, f, g_1, \dots, g_m \in C^1$. Pripusťme, že pro **každou hodnotu parametru** r má úloha $\tag{AC.1}$ **jediné řešení**, které označíme $x^*(r)$. Potom **hodnota úlohy** $\tag{AC.1}$ je $f^*(r) = f(x^*(r), r)$. Je-li $x^*(r)$ **diferencovatelná** vzhledem k r a **Jacobiho matice** $G(x^*(r), r) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má **plnou hodnost** m , pak platí $\frac{\partial f^*(r)}{\partial r_i} = \frac{\partial f}{\partial r_i}(x^*(r), r) + \sum_{j=1}^m y_j(r) \frac{\partial g_j}{\partial r_i}(x^*(r), r)$

“ Obálka je křivka, která se **množiny křivek dotýká** (tj. se dotýká každé křivky) a má společnou tečnu s danou křivkou

Jinak řečeno je **tečná** k množině **křivek**



Požadavky Věty $\tag{4.4.1}$ jsou relativně silné, proto uveďme její "slabší verzi".

Věta $\tag{4.4.2}$

Nechť $f, g_1, \dots, g_m \in C^2$ a x^* je **lokálním řešením** úlohy $f(x) \rightarrow \min, \text{qquad} g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$ s odpovídajícími Lagrangeovými multiplikátory y^* . Nechť dále tato dvojice splňuje **postačující podmínku druhého řádu**, tj. $\text{hess}_x L(x^*, y^*) > 0$ na $\ker G(x^*)$, přičemž současně x^* je **regulárním bodem**, tj. $G(x^*) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má **plnou hodnost** m . Uvažme úlohu **parametrického programování** $f(x) \rightarrow \min, \text{qquad} G(x) = u \tag{AC.2}$, kde $u \in \mathbb{R}^m$. Pak **existuje otevřená koule** S se **středem v počátku** ($u = 0$) taková, že pro každé $u \in S$ existuje **lokální řešení** $x^*(u) \in \mathbb{R}^n$ úlohy $\tag{AC.2}$ a odpovídající $y^*(u) \in \mathbb{R}^m$. Navíc $x^*(\cdot)$ a $y^*(\cdot)$ jsou **spojitě diferencovatelné** funkce na S a platí $x^*(0) = x^*, y^*(0) = y^*$ a pro každé $u \in S$ máme $\text{grad} f^*(u) = -y^*(u)$, kde $f^*(u)$ značí **optimální hodnotu úlohy** $\tag{AC.2}$ vzhledem k u , tj. klademe $f^*(u) := f(x^*(u))$.

Jednoduše řečeno se optimální hodnota mění **podle Lagrangeových multiplikátorů** pro danou hodnotu u

Úlohy s nerovnostmi

Uvažujme úlohu závislou na m -tici parametrů $b = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$, tj. $f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X(b) := \{x \in P \mid g_i(x) \leq b_i, \quad i \in \{1, \dots, m\}\}$ $\tag{T{4.4.2}}$ A dále zavedme značení $G(x) := (g_1(x), \dots, g_m(x))^T, \quad X(b) := \{x \in P \mid G(x) \leq b\}$ $B := \{b \in \mathbb{R}^m \mid X(b) \neq \emptyset\}, \quad F(b) := \inf_{x \in X(b)} f(x), \quad b \in B$ množinu **K-T vektorů** úlohy $\tag{4.4.2}$ označme $Y(b) := \{y \in \mathbb{R}^m \mid y \geq 0, \quad F(b) \leq f(x) + \sum_{i=1}^m y_i (G_i(x) - b_i) \quad \forall x \in P\}$ a **subdiferenciál** funkce $F(b)$ (viz Definice $\tag{2.5.1}$ [./subgradient-a-subdiferencial-a-fenchelova-transformace](#)) označme $\text{subd} F(b) := \{a \in \mathbb{R}^m \mid F(b') - F(b) \leq \sum_{i=1}^m a_i (b'_i - b_i) \quad \forall b' \in B\}$

Věta $\tag{4.4.3}$

Nechť množina $P \subseteq \mathbb{R}^n$ je **konvexní**, funkce f, g_1, \dots, g_m jsou **konvexní** na P a platí $0 \in B, F(0) > -\infty$ a $Y(0) \neq \emptyset$. Potom

- množina B je **konvexní**
- funkce $F(b)$ je **konečná, konvexní a nerostoucí** na B
- platí $\text{subd} F(b) = -Y(b)$ pro **všechna** $b \in B$

“ Z předpokladů Věty $\tag{4.4.3}$ plyne, že

- úloha $\tag{4.4.2}$ je **přípustná** pro $b = 0$
- úloha $\tag{4.4.2}$ **má řešení** pro $b = 0$
- množina **K-T vektorů** úlohy $\tag{4.4.2}$ je **neprázdná** (toto **není** splněno automaticky, viz Věta $\tag{4.3.2}$ [./dualni-uloha](#))

Navíc je-li F dokonce **diferencovatelná** v b , pak $\text{subd} F(b)$ je **jednoprvková** množina, která obsahuje **pouze** $-\text{grad} F(b)$ a tedy tento vektor musí být roven $(-1) \cdot$ **jediný K-T vektor** této úlohy. (Toto je analogie Věty *O obálce* $\tag{4.4.1}$)

“ Podle Věty $\tag{4.3.6}$ [./dualni-uloha](#) jsme popsali **K-T vektory** úlohy knvxProg pomocí řešení **duální úlohy** $\tag{4.3.1}$ [./dualni-uloha](#). Část 3. této věty jim navíc dává ještě charakteristiku **subgradientu**

hodnoty úlohy parametrického programování $\S{4.4.2}$.

“ V případě **regulární** úlohy *konvexního programování* dostáváme zkombinováním těchto dvou výsledků $\S{4.4.3}$ $F(b) = -\inf_{y \in Y(b)} \sum_{i=1}^m g_i(y)$, kde $Y(b)$ je množina řešení **duální úlohy** (viz Věta $\S{4.3.6}$ $\S{4.3.6}$). ”

Pomocí Věty $\S{4.4.3}$ jsme schopni dostat zajímavé výsledky o původní úloze *matematického programování*, tj. $\S{4.4.2}$ s $b = 0$.

Důsledek $\S{4.4.4}$

Nechť množina $P \subseteq \mathbb{R}^n$ je **konvexní**, funkce f, g_1, \dots, g_m jsou **konvexní** na P , platí $F(0) > -\infty$ a **existuje** $\bar{x} \in P$ takové, že $G(\bar{x}) < 0$ (viz **Slaterova podmínka** ve Větě $\S{4.3.2}$ $\S{4.3.2}$). Potom $0 \in B$ a

- funkce $F(\cdot)$ je **spojitá** v bodě $b = 0$
- pro libovolné $h \in \mathbb{R}^m$ **existuje jednostranná směrová** derivace $F'_h(0) = \max_{y \in Y(0)} \sum_{i=1}^m g_i(y)$
- funkce F je **diferencovatelná** v bodě $b = 0$ právě tehdy, když $Y(0)$ je **jednoprvková** množina, tj. $Y(0) = \{y\}$. Navíc platí $\nabla F(0) = -y$.

“ Z části 3. okamžitě plyne, že pokud **existuje více K-T vektorů** \iff funkce F **není diferencovatelná** ”

Fenchelova transformace a duální úloha

Lze ukázat, že pro $F(b)$ **hodnotu primární úlohy** je $F(y) = -\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m g_i(x)$ a tedy duální úlohu $\S{4.3.1}$ $\S{4.3.1}$ je možné psát jako $\max_{y \geq 0} -F(y)$

Revision #5

Created 2 January 2023 14:49:36 by Sceptri

Updated 5 January 2023 20:01:22 by Sceptri