

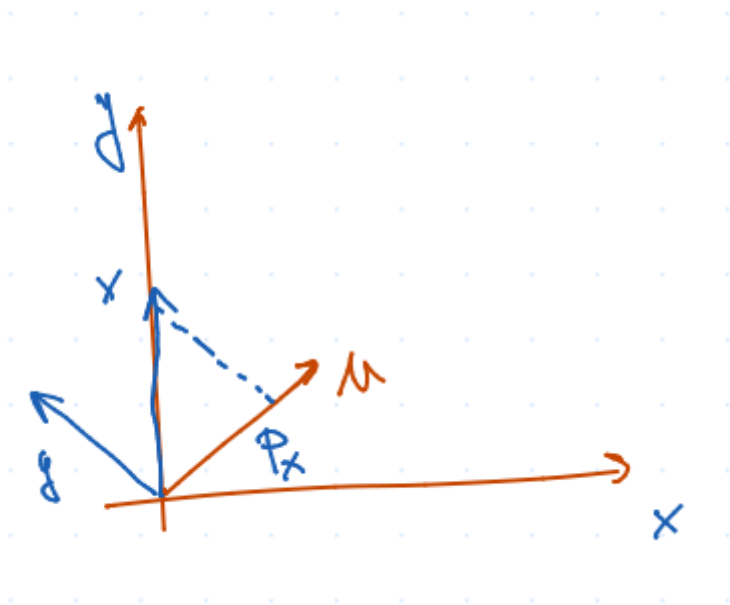
# 5. cvičení

```
$$ \xdef\mcal#1{\mathcal{#1}} \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\N{\mathbb N}
\xdef\R{\mathbb R} \xdef\Q{\mathbb{Q}} \xdef\Z{\mathbb{Z}} \xdef\D{\mathbb{D}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}}
\xdef\floor#1{\lfloor #1 \rfloor} \xdef\ceil#1{\lceil #1 \rceil} \xdef\grad#1{\mathrm{grad} , #1}
\xdef\ve{\varepsilon} \xdef\im#1{\mathrm{im}(#1)} \xdef\tr#1{\mathrm{tr}(#1)}
\xdef\norm#1{\left\| \left\| #1 \right\| \right\|} \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle}
\xdef\ex#1{\mathrm{E} , \left( #1 \right)} \xdef\exv#1{\mathrm{E} , \vv{#1}} $$
```

## 4. cvičení / 2. příklad

### a) i b)

Mějme vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  (takový, že  $\|\mathbf{v}\| = 1$ ), pak matice  $P = \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}^T}{\|\mathbf{v}\|^2}$  je ortogonální projekce na  $\text{im} \{\mathbf{v}\}$ .



Pro ortogonální projekci platí

1.  $P = P \cdot P$  - idempotence projekce
2.  $P$  je symetrická (z ortogonality)

Pak  $P = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}$  a tedy  $PP = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}$

Z definice skalárního součinu  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2$  a proto  $PP = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} = P$ , což zvláště platí pro  $\|\mathbf{v}\| = 1$ . Pro nějaké  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  máme  $P \mathbf{x} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}$

c)

Mějme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  ortonormální vektory, pak matice  $P = U U^T$ , kde  $U = (\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \dots \mid \mathbf{v}_p)$ , je ortogonální projekce na  $\text{im } U$ .

Ukažme  $P \cdot P = U \underbrace{U^T U}_I U^T = U U^T = P$  a  $P \mathbf{x} = U U^T \mathbf{x} = U \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{v}_p, \mathbf{x} \rangle \end{pmatrix} = \underbrace{\mathbf{v}_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x} \rangle}_{\in \mathbb{R}} + \dots + \underbrace{\mathbf{v}_p \langle \mathbf{v}_p, \mathbf{x} \rangle}_{\in \mathbb{R}} \in \text{im } U$ , což je lineární kombinace vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$  a jistě tedy  $P \mathbf{x} \in \text{im } U$ .

d) i e)

Máme lineárně nezávislé vektory  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ , pak  $P = A(A^T A)^{-1} A^T$  je ortogonální projekce.

Jednou možností by bylo použít spektrální rozklad  $A = U \Sigma V^T$ , čehož bychom dostali  $P = U U^T$ , což jsme ukázali v bodě c).

Druhá možnost je  $PP = A(A^T A)^{-1} \underbrace{A^T A(A^T A)^{-1}}_I A^T = P$ , což stejně fungovalo i pro pseudoinverzi. Dále  $A \mathbf{x} = \mathbf{y} \in \text{im } A$ , pak  $P \mathbf{y} = A(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y} = A \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y}}_{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} = \mathbf{y}$

„Zde jsme jen ukázali něco o  $\mathbf{y} \in \text{im } A$ , nikoliv o obecném  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ “

## 5. cvičení / 1. příklad

Nechť  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$  a  $DX = \text{Var } \mathbf{X} = \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$  platí  $\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \text{Cov}(X_1, X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Cov}(X_2, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}$

a)

Ukažme  $\mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{b}$ , což je analogické k jednorozměrnému případu.

Pro  $i$ -tý prvek platí  $\sum_{k=1}^n a_{i,k} X_k + b_i = \sum_{k=1}^n X_k + b_i$ , což je, co jsme potřebovali.

b)

Ukažme  $\text{Var}(\mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{b}) = \mathbf{A} \cdot \text{Var } \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}^T$  což je opět analogie k  $D(aX + b) = a^2 D X$ .

Využijeme vlastnost kovariance. Tedy pro  $(i, j)$ -tý prvek matice  $\mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{b}$  platí  $\text{Cov} \left( \sum_{k=1}^n a_{i,k} X_k + b_i, \sum_{l=1}^n a_{j,l} X_l + b_j \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{i,k} a_{j,l} \text{Cov}(X_k, X_l) = \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{i,k} \text{Cov}(X_k, X_l) \right) a_{j,l}$

c)

Máme ukázat  $\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} + \text{tr}(\text{Var}(\mathbf{X}))$ , což je ekvivalentní s  $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 = X_1^2 + \dots + X_n^2 + DX_1 + \dots + DX_n$

Obecně platí  $\text{Var}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \mathbf{X}^T - \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T$  a tedy  $\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{X}^T (\mathbf{X} \mathbf{X}^T - \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T) = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{X}^T - \mathbf{X}^T \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T = \text{tr}(\mathbf{X} \mathbf{X}^T) = \text{tr}(\text{Var}(\mathbf{X}) + \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T) = \text{tr}(\text{Var}(\mathbf{X})) + \mathbf{X}^T \mathbf{X}$