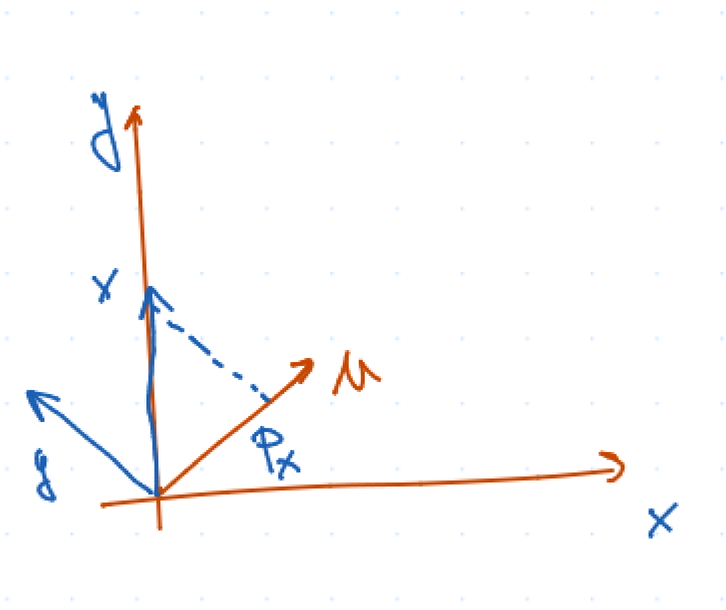
5. cvičení

$$ \xdef\mcal#1{\mathcal{#1}} \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\N{\mathbb N} \xdef\R{\mathbb R} \xdef\Q{\mathbb{Q}} \xdef\Z{\mathbb{Z}} \xdef\D{\mathbb{D}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\floor#1{\lfloor #1 \rfloor} \xdef\ceil#1{\lceil #1 \rceil} \xdef\grad#1{\mathrm{grad} , #1} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\im#1{\mathrm{im}(#1)} \xdef\tr#1{\mathrm{tr}(#1)} \xdef\norm#1{\left\vert \left\vert #1 \right\vert\right\vert} \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\ex#1{\mathrm{E} ,\left(#1\right)} \xdef\exv#1{\mathrm{E}, \vv{#1}} $$

4. cvičení / 2. příklad

a) i b)

Mějme vektor $\vv u \in \R^n$ (takový, že $\norm{\vv u} = 1$), pak matice $$ P = \frac {\vv u \vv u^T} {\norm {\vv u}^2} $$ je ortogonální projekce na $\im {\vv u}$.



Pro ortogonální projekci platí

1. $P = P \cdot P$ - idempotence projekce
2. P je symetrická (z ortogonality)

Pak $$ P = \frac {\vv u \vv u^T} {\norm {\vv u}^2} $$ a tedy $$ PP = \frac {\vv u \vv u^T} {\norm {\vv u}^2} \frac {\vv u \vv u^T} {\norm {\vv u}^2} $$

Z definice skalárního součiny $\scal {\vv u} {\vv u} = \norm {\vv u}^2$ a proto $$ PP = \frac {\vv u \vv u^T} {\norm{\vv u}^2} = P, $$ což zvláště platí pro $\norm{\vv u} = 1$. Pro nějaké $\vv x \in \R^n$ máme $$ P \vv x = \frac {\vv u \vv u^T \vv x} {\norm {\vv u}^2} = \frac {\vv u \scal {\vv u} {\vv x}} {\norm{\vv u}^2} = \underbrace{\frac {\scal {\vv u} {\vv x}} {\norm{\vv u}^2}}_ {\in \R} \vv u \in \im {\vv u} $$

c)

Mějme ${ \vv u_ 1, \dots, \vv u_ p }$ ortonormální vektory, pak matice $$ P = U U^T, $$ kde $U = (\vv u_ 1 \; \vv u_ 2 \; \dots \; \vv u_ p)$, je ortogonální projekce na $\im U$.

Ukažme $$ P \cdot P = U \underbrace{U^T U}_ {I} U^T = U U^T $$ a $$ P\vv x = U U^T \vv x = U \cdot \begin{pmatrix} \scal {\vv u_ 1} {\vv x} \ \scal {\vv u_ 2} {\vv x} \ \vdots \ \scal {\vv u_ p} {\vv x} \ \end{pmatrix} = \underbrace{\vv u_ 1 \scal {\vv u_ 1} {\vv x}}_ {\in \R} + \dots + \underbrace{\vv u_ p \scal {\vv u_ p} {\vv x}}_ {\in \R} \in \im U, $$ což je lineární kombinace vektorů $\vv u_1, \dots, \vv u_p$ a jistě tedy $P \vv x \in \im U$.

d) i e)

Máme lineárně nezávislé vektory ${\vv a_1, \dots, \vv a_n}$, pak $$ P = A(A^T A)^{-1}A^T $$ je ortogonální projekce.

Jednou možností by bylo použít spektrální rozklad $A = U \Sigma V$, čehož bychom dostali $P = U U^T$, což jsme ukázali v bodě **c)**.

Druhá možnost je $$ PP = A(A^T A)^{-1}\underbrace{A^T A(A^T A)^{-1}}_ {I}A^T = P, $$ což stejně fungovalo i pro pseudoinverzi. Dále $$ A \vv x = \vv y \in \im A, $$ pak $$ P \vv y = (A(A^T A)^{-1}A^T) \vv y = A \underbrace{(A^T A)^{-1}A^T A}_ {I} \vv x = A \vv x = \vv y $$

> Zde jsme jen ukázali něco o $\vv y \in \im A$, nikoliv o obecném $\vv x \in \R^p$

5. cvičení / 1. příklad

Nechť $$ \exv X = \begin{pmatrix} \ex X_1 \ \ex X_2 \ \vdots \ \ex X_n \end{pmatrix} $$ a $DX = Var X = Cov(\vv X, \vv X)$ platí $$ Cov(\vv X, \vv X) = \begin{pmatrix} Cov(X_1, X_1) & Cov(X_1, X_2) & \dots & Cov(X_1, X_n) \ Cov(X_2, X_1) & Cov(X_2, X_2) & \dots & Cov(X_2, X_n) \ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \dots & Cov(X_n, X_n) \end{pmatrix} $$

a)

Ukažme $$ \ex {A \vv X + \vv b} = A\cdot \exv X + \vv b, $$ což je analogické k jednorozměrnému případu.

Pro i-tý prvek platí $$ \ex {\sum_{k = 1}^n a_{i,k} X_k + b_i} = \sum_{k = 1}^n \ex {X_k} + b_i, $$ což je, co jsme potřebovali.

b)

Ukažme $$ Var(A\vv X + \vv b) = A \cdot Var \vv X \cdot A^T $$ což je opět analogie k $D(a X + b) = a^2 D X$.

Využijeme vlastnost kovariance. Tedy pro (i,j)-tý prvek matice $A \vv X + \vv b$ platí $$ Cov \left(\sum_{k = 1}^n a_{i,k} X_k + b_i, \sum_{k = 1}^n a_{j,k} X_k + b_j \right) = \sum_{k = 1}^n \sum_{l = 1}^n a_{i,k} a_{j,l} Cov (X_k, X_l) = $$ $$ = \sum_{l = 1}^n \left(\sum_{k = 1}^n a_{i,k} Cov(X_k, X_l) \right) a_{j,l} $$

c)

Máme ukázat $$ \ex {\vv X^T \vv X} = \exv X^T \exv X + tr(Var(\vv X)), $$ což je ekvivalentní s $$ \ex{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2} = \ex{X_1}^2 + \dots + \ex{X_n}^2 + DX_1 + \dots + DX_n $$

Obecně platí $$ Var(\vv X) = \ex{\vv X \vv X^T} - \exv X \cdot \exv X^T $$ a tedy $$ \ex {\vv X^T \vv X} = \ex {tr(\vv X^T \vv X)} = $$ pak dle vlastnosti stopy matice $$ = \ex {tr(\vv X \vv X^T)} = tr(\ex{\vv X \vv X^T}) = tr(Var(\vv X) + \exv X \cdot \exv X^T) = $$ a opět dle vlastnosti stopy matice $$ = tr(Var(\vv X)) + tr(\exv X \cdot \exv X^T) = \exv X^T \cdot \exv X + tr(Var(\vv X)) $$

Revision #3
Created 12 January 2023 12:04:16 by Sceptri
Updated 12 January 2023 14:18:54 by Sceptri