

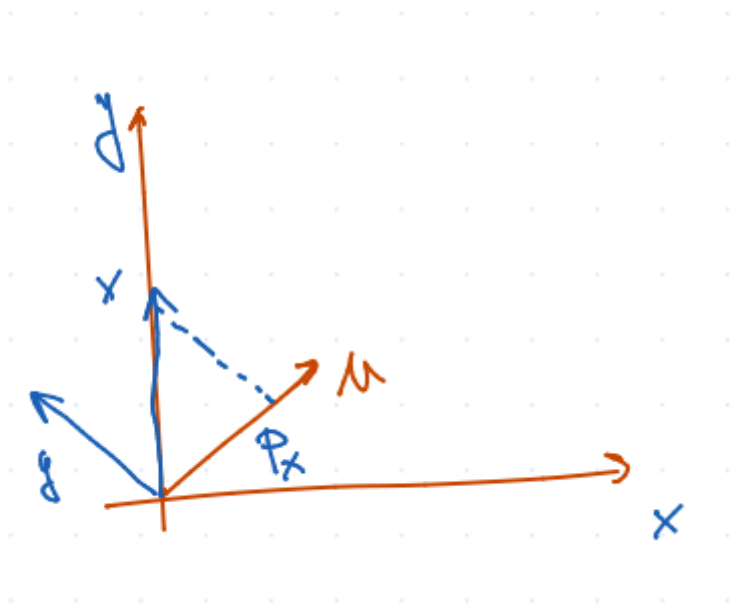
5. cvičení

```
$$ \xdef\mcal#1{\mathcal{#1}} \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\N{\mathbb N}
\xdef\R{\mathbb R} \xdef\Q{\mathbb{Q}} \xdef\Z{\mathbb{Z}} \xdef\D{\mathbb{D}}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}}
\xdef\floor#1{\lfloor #1 \rfloor} \xdef\ceil#1{\lceil #1 \rceil} \xdef\grad#1{\mathrm{grad} , #1}
\xdef\ve{\varepsilon} \xdef\im#1{\mathrm{im}(#1)} \xdef\tr#1{\mathrm{tr}(#1)}
\xdef\norm#1{\left\| \left\| #1 \right\| \right\|} \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle}
\xdef\ex#1{\mathrm{E} , \left( #1 \right)} \xdef\exv#1{\mathrm{E} , \vv{#1}} $$
```

4. cvičení / 2. příklad

a) i b)

Mějme vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (takový, že $\|\mathbf{v}\| = 1$), pak matice $P = \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}^T}{\|\mathbf{v}\|^2}$ je ortogonální projekce na $\text{im} \{\mathbf{v}\}$.



Pro ortogonální projekci platí

1. $P = P \cdot P$ - idempotence projekce
2. P je symetrická (z ortogonality)

Pak $P = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}$ a tedy $PP = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}$

Z definice skalárního součinu $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2$ a proto $PP = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2} = P$, což zvláště platí pro $\|\mathbf{u}\| = 1$. Pro nějaké $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ máme $P \mathbf{x} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2} = \underbrace{\frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}}_{\in \mathbb{R}} \mathbf{u} \in \lim \mathbf{u}$

c)

Mějme $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ ortonormální vektory, pak matice $P = U U^T$, kde $U = (\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \dots \mid \mathbf{u}_p)$, je ortogonální projekce na $\lim U$.

Ukažme $P \cdot P = U \underbrace{U^T U}_I U^T = U U^T$ a $P \mathbf{x} = U U^T \mathbf{x} = U \begin{pmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u}_p, \mathbf{x} \rangle \end{pmatrix} = \underbrace{\mathbf{u}_1 \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{x} \rangle}_{\in \mathbb{R}} + \dots + \underbrace{\mathbf{u}_p \langle \mathbf{u}_p, \mathbf{x} \rangle}_{\in \mathbb{R}} \in \lim U$, což je lineární kombinace vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p$ a jistě tedy $P \mathbf{x} \in \lim U$.

d) i e)

Máme lineárně nezávislé vektory $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$, pak $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ je ortogonální projekce.

Jednou možností by bylo použít spektrální rozklad $A = U \Sigma V$, čehož bychom dostali $P = U U^T$, což jsme ukázali v bodě c).

Druhá možnost je $PP = A(A^T A)^{-1} \underbrace{A^T A(A^T A)^{-1}}_I A^T = P$, což stejně fungovalo i pro pseudoinverzi. Dále $A \mathbf{x} = \mathbf{y} \in \lim A$, pak $P \mathbf{y} = (A(A^T A)^{-1} A^T) \mathbf{y} = A \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T A}_I \mathbf{x} = A \mathbf{x} = \mathbf{y}$

„ Zde jsme jen ukázali něco o $\mathbf{y} \in \lim A$, nikoliv o obecném $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$

5. cvičení / 1. příklad

Nechť $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ a $DX = \text{Var } X = \text{Cov}(\text{vv } X, \text{vv } X)$ platí $\text{Cov}(\text{vv } X, \text{vv } X) = \begin{pmatrix} \text{Cov}(X_1, X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Cov}(X_2, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}$

a)

Ukažme $A \text{vv } X + \text{vv } b = A \cdot X + b$, což je analogické k jednorozměrnému případu.

Pro i -tý prvek platí $\sum_{k=1}^n a_{i,k} X_k + b_i = \sum_{k=1}^n X_k + b_i$, což je, co jsme potřebovali.

b)

Ukažme $\text{Var}(A \text{vv } X + \text{vv } b) = A \cdot \text{Var } X \cdot A^T$ což je opět analogie k $D(aX + b) = a^2 DX$.

Využijeme vlastnost kovariance. Tedy pro (i,j) -tý prvek matice $A \text{vv } X + \text{vv } b$ platí $\text{Cov}(\sum_{k=1}^n a_{i,k} X_k + b_i, \sum_{l=1}^n a_{j,l} X_l + b_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{i,k} a_{j,l} \text{Cov}(X_k, X_l) = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} \text{Cov}(X_k, X_l) \right) a_{j,l}$

c)

Máme ukázat $\text{ex}\{\text{vv } X^T \text{vv } X\} = \text{ex } X^T \text{ex } X + \text{tr}(\text{Var}(\text{vv } X))$, což je ekvivalentní s $\text{ex}\{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2\} = \text{ex}\{X_1\}^2 + \dots + \text{ex}\{X_n\}^2 + DX_1 + \dots + DX_n$

Obecně platí $\text{Var}(\text{vv } X) = \text{ex}\{\text{vv } X \text{vv } X^T\} - \text{ex } X \cdot \text{ex } X^T$ a tedy $\text{ex}\{\text{vv } X^T \text{vv } X\} = \text{ex}\{\text{tr}(\text{vv } X^T \text{vv } X)\} = \text{tr}(\text{ex}\{\text{vv } X \text{vv } X^T\}) = \text{tr}(\text{Var}(\text{vv } X) + \text{ex } X \cdot \text{ex } X^T) = \text{tr}(\text{Var}(\text{vv } X)) + \text{tr}(\text{ex } X \cdot \text{ex } X^T) = \text{ex } X^T \cdot \text{ex } X + \text{tr}(\text{Var}(\text{vv } X))$