4. cvičení

$$ \xdef\mcal#1{\mathcal{#1}} \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\N{\mathbb N} \xdef\R{\mathbb R} \xdef\Q{\mathbb{Q}} \xdef\Z{\mathbb{Z}} \xdef\D{\mathbb{D}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\floor#1{\lfloor #1 \rfloor} \xdef\ceil#1{\lceil #1 \rceil} \xdef\grad#1{\mathrm{grad} , #1} \xdef\ve{\varepsilon} \xdef\im#1{\mathrm{im}(#1)} \xdef\tr#1{\mathrm{tr}(#1)} \xdef\norm#1{\left\vert \left\vert #1 \right\vert\right\vert} \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} $$

1. příklad

Máme symetrickou idempotentní matice P velikosti $n\times n$, což je matice **ortogonální projekce**.

a)

Jelikož je P symetrická, tak existuje spektrální rozklad tvaru $$ P = U \Lambda U^T $$

> matice U je ortogonální a plné hodnosti

a jelikož je idempotentní $$ P = PP $$ Potom $$ U\Lambda U^T = P = PP = U \Lambda \underbrace{U^T U}_{I} \Lambda U^T = U \Lambda^2 U^T $$ A celkem dostáváme $\Lambda^2 = \Lambda$. Navíc jelikož je Λ diagonální, tak pro všechna vlastní čísla λ matice Λ platí $$ \lambda^2 = \lambda\ (\lambda - 1)\lambda = 0 \implies \lambda = 0 \lor \lambda = 1 $$

> Idempotentní matice P je invertibilní právě tehdy, když $P = I$

b)

Jelikož $P = U\Lambda U^T$, pak U je plné hodnosti (je ortogonální), pak $$ h(P) = h(U\Lambda U^T) = h(\Lambda) = | \set{\lambda_i, \; \lambda_i = 1} | $$

c)

Z části **b)** máme $$ \implies h(P) = \dots = \sum \lambda_i = \tr \Lambda = \tr {\Lambda U U^T} $$ A jelikož pro stopu součinu matic platí $\tr {A B C} = \tr {C A B}$ (invariantnost vůči cyklickým operacím), pak $$ \implies h(P) = \dots = \tr {U \Lambda U^T} = \tr P $$

d)

Je-li vektor $\vv y \in \im P$, pak $P \vv y = \vv y$ Pokud $\vv y \in \im P$, pak $\exists \vv z$, že $\vv y = P \vv z$

> Definice obrazu $\im P$: $$\im P = \set{\vv y \in \R^n \mid \exists \vv z \in \R^n : \; P\vv z = \vv y}$$

Pak $$ P \vv y = P (P \vv z) = (P P) \vv z = P \vv z = \vv y $$

e)

> Chceme ukázat, že projekce do menšího podprostoru je zároveň projekce do onoho většího prostoru

Nechť $\vv z \in \R^n$ je libovolné, projekce z do menšího prostoru je prvek většího prostoru. $$ \tilde P \vv z \in \im {\tilde P} \leq \im P $$ Pak podle **d)** platí $$ P(\tilde P \vv z) = \tilde P \vv z\ P(\tilde P \vv z) - \tilde P \vv z = \vv 0 \ (P\tilde P - \tilde P) \vv z = \vv 0, $$ nicméně vektor $\vv z$ byl libovolný. To tedy znamená, že zobrazení $P \tilde P - \tilde P$ pošle všechny $\vv z \in \R^n$ na nulový vektor, tj. $$ \ker (P \tilde P - \tilde P) = \R^n $$ Z lineární algebry víme, že $\dim \ker(A) + \dim \im A = n$ pro A tvaru $n \times n$. A tedy $$ \dim \im {P \tilde P - \tilde P} = 0 \implies P \tilde P - \tilde P = \vv 0 $$ Neboť $P, \tilde P$ jsou ortogonální projekce, tak jsou symetrické. Celkem $$ \tilde P P = \tilde P^T P^T = (\tilde P P)^T = \tilde P^T = \tilde P = P\tilde P $$

f)

Nechť $\vv x \in \R^n$ pevné. Mějme $P \vv z \in \im P$ Vezměme libovolné $\vv y \in \im P$ a spočítáme $\norm {\vv y - \vv x}^2$ Pak $$ \norm {\vv y - \vv x}^2 = \norm{P \vv x - x + y - P \vv x}^2 = \scal {(P \vv x - \vv x) + (\vv y - P \vv x)} {(P \vv x - \vv x) + (\vv y - P \vv x)} $$

> Pro skalární součin platí $$\scal {\vv u} {\vv v} = \scal {\vv v} {\vv u} \ \scal {\vv u + \vv v} {\vv w} = \scal {\vv u} {\vv w} + \scal {\vv v} {\vv w} \ \scal {\vv u} {a\vv v} = a \scal {\vv u} {\vv v}, ; a \in \R $$

Pak dostáváme $$ = \norm{P \vv x - \vv x}^2 + 2 \scal {P \vv x - \vv x} {\vv y - P \vv x} + \norm{\vv y - P \vv x}^2 $$

A zajímá nás hlavně $\scal {P \vv x - \vv x} {\vv y - P \vv x}$, tedy

$$ \scal {P \vv x - \vv x} {\vv y - P \vv x} = (\vv y - P \vv x)^T (P \vv x - \vv x) = \vv y^T (P \vv x - \vv x) - (P \vv x)^T P \vv x - \vv x = $$ $$ = \vv y^T P \vv x - \vv y^T \vv x - \vv x^T \underbrace{P^T P}_ {P} \vv x + \vv x^T P^T \vv x = \vv y^T P \vv x - \vv y^T \vv x $$

Jelikož $\vv y \in \im P$, tak jistě $\exists \vv z \in \R^n$ takové, že $\vv y = P \vv z$. Z toho plyne

$$ \vv y^T P \vv x - \vv y^T \vv x = (P \vv z)^T P \vv x - (P \vv z)^T \vv x = \vv z^T \underbrace{P^T P}_ {P} \vv x - \vv z^T \underbrace{P^T}_ {P} \vv x = 0 $$

Celkem $\norm {\vv y - \vv x}^2$ závisí pouze na $\norm {\vv y - P\vv x}^2$ a $$ \norm{P \vv x - \vv x}^2 + \underbrace{2 \scal {P \vv x - \vv x} {\vv y - P \vv x}}_{0} + \norm{\vv y - P \vv x}^2 \geq \norm{P \vv x - \vv x}^2 $$ a rovnost nastane pouze v případě $P \vv x = \vv y$.

Zadání v `R`

Vykreslit si grafy hustot a distribučních funkcí pro

- $N(0,1)$ a spočítat $P(X \leq 2)$
- Studentovo $t(df = 5)$ a spočítat $P(X \leq 2)$
- $\chi^2(df = 10)$ a spočítat $P(X \leq 20)$
- Fisherovo $F(5, 10)$ a spočítat $P(X \leq 2)$

a vypočtěte 95% kvantil a zaznačte do grafu

Revision #4
Created 12 January 2023 12:01:22 by Sceptri
Updated 12 January 2023 14:12:40 by Sceptri