

# 4. cvičení

```
$$ \xdef\mc{#1}{\mathcal{#1}} \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\N{\mathbb N}
\xdef\R{\mathbb R} \xdef\Q{\mathbb Q} \xdef\Z{\mathbb Z} \xdef\D{\mathbb D}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}}
\xdef\floor#1{\lfloor #1 \rfloor} \xdef\ceil#1{\lceil #1 \rceil} \xdef\grad#1{\mathrm{grad} , #1}
\xdef\ve{\varepsilon} \xdef\im#1{\mathrm{im}(#1)} \xdef\tr#1{\mathrm{tr}(#1)}
\xdef\norm#1{\left\| \left\| #1 \right\| \right\|} \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle}
$$
```

## 1. příklad

Máme symetrickou idempotentní matici  $P$  velikosti  $n \times n$ , což je matice **ortogonální projekce**.

a)

Jelikož je  $P$  symetrická, tak existuje spektrální rozklad tvaru  $P = U \Lambda U^T$

“ matice  $U$  je ortogonální a plné hodnosti

a jelikož je idempotentní  $P = PP$  Potom  $U \Lambda U^T = P = PP = U \Lambda \underbrace{U^T U}_I \Lambda U^T = U \Lambda^2 U^T$  A celkem dostáváme  $\Lambda^2 = \Lambda$ . Navíc jelikož je  $\Lambda$  diagonální, tak pro všechna vlastní čísla  $\lambda$  matice  $\Lambda$  platí  $\lambda^2 = \lambda \implies \lambda(\lambda - 1) = 0 \implies \lambda = 0 \text{ or } \lambda = 1$

“ Idempotentní matice  $P$  je invertibilní právě tehdy, když  $P = I$

b)

Jelikož  $P = U\Lambda U^T$ , pak  $U$  je plné hodnosti (je ortogonální), pak  $h(P) = h(U\Lambda U^T) = h(\Lambda) = |\{\lambda_i, \lambda_i = 1\}|$

c)

Z části **b)** máme  $\implies h(P) = \dots = \sum \lambda_i = \text{tr } \Lambda = \text{tr } \{\Lambda U U^T\}$   
 $\implies$  A jelikož pro stopu součinu matic platí  $\text{tr } \{A B C\} = \text{tr } \{C A B\}$  (invariantnost vůči cyklickým operacím), pak  $\implies h(P) = \dots = \text{tr } \{U \Lambda U^T\} = \text{tr } P$

d)

Je-li vektor  $y \in \text{im } P$ , pak  $P y = y$ . Pokud  $y \in \text{im } P$ , pak  $\exists z$ , že  $y = P z$

Definice obrazu  $\text{im } P$ :  $\text{im } P = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists z \in \mathbb{R}^n : y = P z\}$

Pak  $P y = P (P z) = (P P) z = P z = y$

e)

Chceme ukázat, že projekce do menšího podprostoru je zároveň projekce do onoho většího prostoru

Nechť  $z \in \mathbb{R}^n$  je libovolné, projekce  $z$  do menšího prostoru je prvek většího prostoru.  $\tilde{P} z \in \text{im } \{\tilde{P}\} \leq \text{im } P$  Pak podle **d)** platí  $P(\tilde{P} z) = \tilde{P} z$   
 $P(\tilde{P} z) - \tilde{P} z = 0 \implies (P - \tilde{P}) z = 0$ , nicméně vektor  $z$  byl libovolný. To tedy znamená, že zobrazení  $P - \tilde{P}$  pošle všechny  $z \in \mathbb{R}^n$  na nulový vektor, tj.  $\ker(P - \tilde{P}) = \mathbb{R}^n$ . Z lineární algebry víme, že  $\dim \ker(A) + \dim \text{im } A = n$  pro  $A$  tvaru  $n \times n$ . A tedy  $\dim \text{im } \{P - \tilde{P}\} = 0 \implies P - \tilde{P} = 0$ .  
 Neboť  $P, \tilde{P}$  jsou ortogonální projekce, tak jsou symetrické. Celkem  $\tilde{P} P = \tilde{P}^T P^T = (\tilde{P} P)^T = \tilde{P}^T = \tilde{P} = P \tilde{P}$

f)

Nechť  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  pevné. Mějme  $\mathbf{P} \mathbf{z} \in \lim P$  Vezměme libovolné  $\mathbf{y} \in \lim P$  a spočítáme  $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2$  Pak  $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x}\|^2 = \text{scal} \{(\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}) + (\mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x})\} \{(\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}) + (\mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x})\}$

Pro skalární součin platí  $\text{scal} \{\mathbf{u}\} \{\mathbf{v}\} = \text{scal} \{\mathbf{v}\} \{\mathbf{u}\}$   $\text{scal} \{\mathbf{u} + \mathbf{v}\} \{\mathbf{w}\} = \text{scal} \{\mathbf{u}\} \{\mathbf{w}\} + \text{scal} \{\mathbf{v}\} \{\mathbf{w}\}$   $\text{scal} \{\mathbf{u}\} \{a\mathbf{v}\} = a \text{scal} \{\mathbf{u}\} \{\mathbf{v}\}, ; a \in \mathbb{R}$

Pak dostáváme  $\|\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}\|^2 + 2 \text{scal} \{\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}\} \{\mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x}\} + \|\mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x}\|^2$

A zajímá nás hlavně  $\text{scal} \{\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}\} \{\mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x}\}$ , tedy

$\text{scal} \{\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}\} \{\mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x}\} = (\mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x})^T (\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}) - (\mathbf{P} \mathbf{x})^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{y}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{y}^T \mathbf{x}$

Jelikož  $\mathbf{y} \in \lim P$ , tak jistě  $\exists \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  takové, že  $\mathbf{y} = \mathbf{P} \mathbf{z}$ . Z toho plyne

$\mathbf{y}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{y}^T \mathbf{x} = (\mathbf{P} \mathbf{z})^T \mathbf{P} \mathbf{x} - (\mathbf{P} \mathbf{z})^T \mathbf{x} = \mathbf{z}^T \underbrace{\mathbf{P}^T \mathbf{P}}_{\mathbf{P}} \mathbf{x} - \mathbf{z}^T \underbrace{\mathbf{P}^T}_{\mathbf{P}} \mathbf{x} = 0$

Celkem  $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2$  závisí pouze na  $\|\mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x}\|^2$  a  $\|\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}\|^2 + \underbrace{2 \text{scal} \{\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}\} \{\mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x}\}}_{0} + \|\mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x}\|^2 \geq \|\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}\|^2$  a rovnost nastane pouze v případě  $\mathbf{P} \mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

## Zadání v R

Vykreslit si grafy hustot a distribučních funkcí pro

- $N(0,1)$  a spočítat  $P(X \leq 2)$
- Studentovo  $t(df = 5)$  a spočítat  $P(X \leq 2)$
- $\chi^2(df = 10)$  a spočítat  $P(X \leq 20)$
- Fisherovo  $F(5, 10)$  a spočítat  $P(X \leq 2)$

a vypočtete 95% kvantil a zaznačte do grafu