

4. cvičení

```
$$ \xdef\mc{#1}{\mathcal{#1}} \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\N{\mathbb N}
\xdef\R{\mathbb R} \xdef\Q{\mathbb Q} \xdef\Z{\mathbb Z} \xdef\D{\mathbb D}
\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}}
\xdef\floor#1{\lfloor #1 \rfloor} \xdef\ceil#1{\lceil #1 \rceil} \xdef\grad#1{\mathrm{grad} , #1}
\xdef\ve{\varepsilon} \xdef\im#1{\mathrm{im}(#1)} \xdef\tr#1{\mathrm{tr}(#1)}
\xdef\norm#1{\left\| \left\| #1 \right\| \right\|} \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle}
$$
```

1. příklad

Máme symetrickou idempotentní matici P velikosti $n \times n$, což je matice **ortogonální projekce**.

a)

Jelikož je P symetrická, tak existuje spektrální rozklad tvaru $P = U \Lambda U^T$

“ matice U je ortogonální a plné hodnosti

a jelikož je idempotentní $P = PP$ Potom $U \Lambda U^T = P = PP = U \Lambda \underbrace{U^T U}_I \Lambda U^T = U \Lambda^2 U^T$ A celkem dostáváme $\Lambda^2 = \Lambda$. Navíc jelikož je Λ diagonální, tak pro všechna vlastní čísla λ matice Λ platí $\lambda^2 = \lambda \implies \lambda(\lambda - 1) = 0 \implies \lambda = 0 \text{ or } \lambda = 1$

“ Idempotentní matice P je invertibilní právě tehdy, když $P = I$

b)

Jelikož $P = U\Lambda U^T$, pak U je plně hodnosti (je ortogonální), pak $h(P) = h(U\Lambda U^T) = h(\Lambda) = |\{\lambda_i, \lambda_i = 1\}|$

c)

Z části **b)** máme $\implies h(P) = \dots = \sum \lambda_i = \text{tr } \Lambda = \text{tr } \{\Lambda U U^T\}$
 A jelikož pro stopu součinu matic platí $\text{tr } \{A B C\} = \text{tr } \{C A B\}$ (invariantnost vůči cyklickým operacím), pak $\implies h(P) = \dots = \text{tr } \{U \Lambda U^T\} = \text{tr } P$

d)

Je-li vektor $y \in \text{im } P$, pak $P y = y$ Pokud $y \in \text{im } P$, pak $\exists z$, že $y = P z$

Definice obrazu $\text{im } P$: $\text{im } P = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists z \in \mathbb{R}^n : y = P z\}$

Pak $P y = P (P z) = (P P) z = P z = y$

e)

Chceme ukázat, že projekce do menšího podprostoru je zároveň projekce do onoho většího prostoru

Nechť $z \in \mathbb{R}^n$ je libovolné, projekce z do menšího prostoru je prvek většího prostoru. $\tilde{P} z \in \text{im } \{\tilde{P}\} \leq \text{im } P$ Pak podle **d)** platí $P(\tilde{P} z) = \tilde{P} z$
 $P(\tilde{P} z) - \tilde{P} z = 0 \implies (P - \tilde{P}) z = 0$, nicméně vektor z byl libovolný. To tedy znamená, že zobrazení $P - \tilde{P}$ pošle všechny $z \in \mathbb{R}^n$ na nulový vektor, tj. $\ker(P - \tilde{P}) = \mathbb{R}^n$ Z lineární algebry víme, že $\dim \ker(A) + \dim \text{im } A = n$ pro A tvaru $n \times n$. A tedy $\dim \{P - \tilde{P}\} = 0 \implies P - \tilde{P} = 0$ Neboť P, \tilde{P} jsou ortogonální projekce, tak jsou symetrické. Celkem $\tilde{P} P = \tilde{P}^T P^T = (\tilde{P} P)^T = \tilde{P}^T = \tilde{P} = P - \tilde{P}$

f)

Nechť $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pevné. Mějme $\mathbf{P} \mathbf{z} \in \lim P$ Vezměme libovolné $\mathbf{y} \in \lim P$ a spočítáme $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2$ Pak $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x}\|^2 + 2 \langle \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x} \rangle$

Pro skalární součin platí $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ $\langle \mathbf{u}, a \mathbf{v} \rangle = a \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, ; a \in \mathbb{R}$

Pak dostáváme $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}\|^2 + 2 \langle \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x} \rangle + \|\mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x}\|^2$

A zajímá nás hlavně $\langle \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x} \rangle$, tedy

$\langle \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x} \rangle = (\mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x})^T (\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}) - (\mathbf{P} \mathbf{x})^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{y}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{y}^T \mathbf{x}$

Jelikož $\mathbf{y} \in \lim P$, tak jistě $\exists \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\mathbf{y} = \mathbf{P} \mathbf{z}$. Z toho plyne

$\mathbf{y}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{y}^T \mathbf{x} = (\mathbf{P} \mathbf{z})^T \mathbf{P} \mathbf{x} - (\mathbf{P} \mathbf{z})^T \mathbf{x} = \mathbf{z}^T \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \mathbf{z}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{P} - \mathbf{P}) \mathbf{x} = 0$

Celkem $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2$ závisí pouze na $\|\mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x}\|^2$ a $\|\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{P} \mathbf{x}\|^2 \geq \|\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}\|^2$ a rovnost nastane pouze v případě $\mathbf{P} \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Zadání v R

Vykreslit si grafy hustot a distribučních funkcí pro

- $N(0,1)$ a spočítat $P(X \leq 2)$
- Studentovo $t(df = 5)$ a spočítat $P(X \leq 2)$
- $\chi^2(df = 10)$ a spočítat $P(X \leq 20)$
- Fisherovo $F(5, 10)$ a spočítat $P(X \leq 2)$

a vypočtete 95% kvantil a zaznačte do grafu