

3. cvičení

$\$ \xdef\mcal#1{\mathcal{#1}} \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\N{\mathbb N}$
 $\xdef\R{\mathbb R} \xdef\Q{\mathbb Q} \xdef\Z{\mathbb Z} \xdef\D{\mathbb D}$
 $\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}}$
 $\xdef\floor#1{\lfloor #1 \rfloor} \xdef\ceil#1{\lceil #1 \rceil} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}} , #1$
 $\xdef\ve{\varepsilon} \$$

Příklad 1

Máme symetrickou, pozitivně definitní matici $m \times m$ značenou Σ .

a)

Poz. def \iff všechna vlastní čísla jsou kladná $\implies \det(\lambda_1 \dots \lambda_m) > 0$
 \implies inverze bude existovat $\implies h(\Sigma) = m$

b)

Matice Σ je *samoadjungovaný operátor* Inverzi sestojíme pomocí spektrálního rozkladu. $\Sigma = U \Lambda U^T$, kde U je tvořená vlastními vektory a je ortogonální ($U \cdot U^T = I$) a Λ je diagonální matice vlastních čísel.

Pak inverze je $\Sigma^{-1} = U \Lambda^{-1} U^T$

A jako ověření $\Sigma \Sigma^{-1} = U \Lambda U^T U \Lambda^{-1} U^T = I$

c)

Ze spektrálního rozkladu je jisté matice Σ^{-1} pozitivně definitní. Nechť $\forall x \neq 0$ libovolné, pak $\forall x^T \Sigma^{-1} \forall x = \forall x^T U \Lambda^{-1} U^T \forall x = \forall x^T U \Lambda^{-\frac{1}{2}} \Lambda^{-\frac{1}{2}} U^T \forall x$, kde $\Lambda^{-\frac{1}{2}}$ je matice s

převrácenými hodnotami odmocnin vlastních čísel matice Σ na diagonále a tedy
$$\underbrace{\mathbf{x}^T \mathbf{U} \Lambda^{-\frac{1}{2}}}_{\mathbf{y}} \underbrace{\Lambda^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U}^T \mathbf{x}}_{\mathbf{y}^T} = \|\mathbf{y}\|^2 > 0$$

d)

Mějme množinu S_c takovou, že
$$S_c = \{ \mathbf{x} ; (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = c \},$$
 kde $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ a $c \in \mathbb{R}$.

Pro $c < 0$ je $S_c \equiv \emptyset$.

Dále pro $c = 0$ je řešením pouze $S_c = \{ \boldsymbol{\mu} \}$.

Nakonec pro $c > 0$ je
$$\underbrace{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{U}}_{\mathbf{y}} \Lambda^{-1} \mathbf{U}^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{y}^T \Lambda^{-1} \mathbf{y} = c$$
 pro $m = 2$ tedy
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c$$
 což je **rovnice elipsy** se středem (μ_1, μ_2) a směry os jsou právě vlastní vektory Σ . Nakonec délky poloos budou $\sqrt{c \lambda_i}$

Analogicky pro $m > 2$ dostaneme **elipsoid**.

Příklad 4

Matice Σ je poz. **semidef** matice symetrická matice $m \times m$.

a)

$h(\Sigma) = r$, kde $0 < r \leq m$.

Nahradíme \mathbf{U} za matici
$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_r \end{pmatrix}$$
 a také
$$\Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$$

b)

Sestrojíme matici $\tilde{\Sigma}$ takovou, že $\tilde{\Sigma} \tilde{\Sigma}^T = \Sigma$ jako $\tilde{\Sigma} = U_1 \Lambda_1^{-\frac{1}{2}}$, když je $h(\Sigma) = r$ a pro $h(\Sigma) = m$ jako $\tilde{\Sigma} = U \Lambda^{-\frac{1}{2}}$.

d)

“ Zde značím pseudoinverzi matice A jako A^\dagger

$\tilde{\Sigma}^\dagger = \Lambda_1^{-\frac{1}{2}} U_1^T$ a pro tuto matici bychom ukázali všechny 4 vlastnosti pseudoinverze, tj.

- $A A^\dagger A = A$
- $A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger$
- $(A^\dagger A)^T = A^\dagger A$
- $(A A^\dagger)^T = A A^\dagger$

Revision #3

Created 12 January 2023 12:00:18 by Sceptri

Updated 14 January 2023 11:31:08 by Sceptri