

# 3. cvičení

$\$ \xdef\mcal#1{\mathcal{#1}} \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\N{\mathbb N}$   
 $\xdef\R{\mathbb R} \xdef\Q{\mathbb Q} \xdef\Z{\mathbb Z} \xdef\D{\mathbb D}$   
 $\xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vp#1{\pmb{#1}}$   
 $\xdef\floor#1{\lfloor #1 \rfloor} \xdef\ceil#1{\lceil #1 \rceil} \xdef\grad#1{\mathrm{grad}} , #1$   
 $\xdef\ve{\varepsilon} \$$

## Příklad 1

Máme symetrickou, pozitivně definitní matici  $m \times m$  značenou  $\Sigma$ .

a)

Poz. def  $\iff$  všechna vlastní čísla jsou kladná  $\implies \det(\lambda_1 \dots \lambda_m) > 0$   
 $\implies$  inverze bude existovat  $\implies h(\Sigma) = m$

b)

Matice  $\Sigma$  je *samoadjungovaný operátor* Inverzi sestojíme pomocí spektrálního rozkladu.  $\Sigma = U \Lambda U^T$ , kde  $U$  je tvořená vlastními vektory a je ortogonální ( $U \cdot U^T = I$ ) a  $\Lambda$  je diagonální matice vlastních čísel.

Pak inverze je  $\Sigma^{-1} = U \Lambda^{-1} U^T$

A jako ověření  $\Sigma \Sigma^{-1} = U \Lambda U^T U \Lambda^{-1} U^T = I$

c)

Ze spektrálního rozkladu je jisté matice  $\Sigma^{-1}$  pozitivně definitní. Nechť  $\forall x \neq 0$  libovolné, pak  $\forall x^T \Sigma^{-1} \forall x = \forall x^T U \Lambda^{-1} U^T \forall x = \forall x^T U \Lambda^{-\frac{1}{2}} \Lambda^{-\frac{1}{2}} U^T \forall x$ , kde  $\Lambda^{-\frac{1}{2}}$  je matice s

převrácenými hodnotami odmocnin vlastních čísel matice  $\Sigma$  na diagonále a tedy 
$$\underbrace{(\mathbf{x}^T \mathbf{U} \Lambda^{-\frac{1}{2}})^T \mathbf{y}}_{\mathbf{y}^T \mathbf{U} \Lambda^{-\frac{1}{2}} \mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{y}^T \mathbf{U} \Lambda^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U}^T \mathbf{y}} > 0$$

d)

Mějme množinu  $S_c$  takovou, že 
$$S_c = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = c \},$$
 kde  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$  a  $c \in \mathbb{R}$ .

Pro  $c < 0$  je  $S_c \equiv \emptyset$ .

Dále pro  $c = 0$  je řešením pouze  $S_c = \{ \boldsymbol{\mu} \}$ .

Nakonec pro  $c > 0$  je 
$$\underbrace{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{U}}_{\mathbf{y}} \Lambda^{-1} \mathbf{U}^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{y}^T \Lambda^{-1} \mathbf{y} = c$$
 pro  $m = 2$  tedy 
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c$$
 
$$\frac{y_1^2}{\lambda_1} + \frac{y_2^2}{\lambda_2} = c,$$
 což je **rovnice elipsy** se středem  $(\mu_1, \mu_2)$  a směry os jsou právě vlastní vektory  $\Sigma$ . Nakonec délky poloos budou  $\sqrt{c \lambda_i}$

Analogicky pro  $m > 2$  dostaneme **elipsoid**.

## Příklad 4

Matice  $\Sigma$  je poz. **semidef** matice symetrická matice  $m \times m$ .

a)

$$h(\Sigma) = r, \text{ kde } 0 < r \leq m.$$

Nahradíme  $\mathbf{U}$  za matici 
$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_r \end{pmatrix}$$
 a také 
$$\Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$$

b)

Sestrojíme matici  $\tilde{\Sigma}$  takovou, že  $\tilde{\Sigma} \tilde{\Sigma}^T = \Sigma$  jako  $\tilde{\Sigma} = U_1 \Lambda_1^{-\frac{1}{2}}$ , když je  $h(\Sigma) = r$  a pro  $h(\Sigma) = m$  jako  $\tilde{\Sigma} = U \Lambda^{-\frac{1}{2}}$ .

d)

“ Zde značím pseudoinverzi matice  $A$  jako  $A^\dagger$

$\tilde{\Sigma}^\dagger = \Lambda_1^{-\frac{1}{2}} U_1^T$  a pro tuto matici bychom ukázali všechny 4 vlastnosti pseudoinverze, tj.

- $A A^\dagger A = A$
- $A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger$
- $(A^\dagger A)^T = A^\dagger A$
- $(A A^\dagger)^T = A A^\dagger$

Revision #3

Created 12 January 2023 12:00:18 by Sceptri

Updated 14 January 2023 11:31:08 by Sceptri