

3. cvičení

$\$ \xdef\mc{#1}{\mathcal{#1}} \xdef\sc{#1}{\langle #1, #1 \rangle} \xdef\N{\mathbb{N}}$
 $\xdef\R{\mathbb{R}} \xdef\Q{\mathbb{Q}} \xdef\Z{\mathbb{Z}} \xdef\D{\mathbb{D}}$
 $\xdef\bm{#1}{\boldsymbol{#1}} \xdef\vv{#1}{\mathbf{#1}} \xdef\vp{#1}{\mathbf{#1}}$
 $\xdef\floor{#1}{\lfloor #1 \rfloor} \xdef\ceil{#1}{\lceil #1 \rceil} \xdef\grad{#1}{\mathrm{grad} , #1}$
 $\xdef\ve{\varepsilon} \$$

Příklad 1

Máme symetrickou, pozitivně definitní matici $m \times m$ značenou Σ .

a)

Poz. def \iff všechna vlastní čísla jsou kladná $\implies \det(\lambda_1 \dots \lambda_m) > 0$
 \implies inverze bude existovat $\implies h(\Sigma) = m$

b)

Matice Σ je *samoadjungovaný operátor* Inverzi sestojíme pomocí spektrálního rozkladu. $\Sigma = U \Lambda U^T$, kde U je tvořená vlastními vektory a je ortogonální ($U \cdot U^T = I$) a Λ je diagonální matice vlastních čísel.

Pak inverze je $\Sigma^{-1} = U \Lambda^{-1} U^T$

A jako ověření $\Sigma \Sigma^{-1} = U \Lambda U^T U \Lambda^{-1} U^T = I$

c)

Ze spektrálního rozkladu je jisté matice Σ^{-1} pozitivně definitní. Nechť $\forall x \neq 0$ libovolné, pak $\forall x^T \Sigma^{-1} \forall x = \forall x^T U \Lambda^{-1} U^T \forall x = \forall x^T U \Lambda^{-\frac{1}{2}} \Lambda^{-\frac{1}{2}} U^T \forall x$, kde $\Lambda^{-\frac{1}{2}}$ je matice s

převrácenými hodnotami odmocnin vlastních čísel matice Σ na diagonále a tedy
$$\underbrace{(\mathbf{x}^T \mathbf{U} \Lambda^{-\frac{1}{2}})^T \mathbf{y}}_{\mathbf{y}^T \mathbf{U} \Lambda^{-\frac{1}{2}} \mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} > 0$$

d)

Mějme množinu S_c takovou, že
$$S_c = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = c \},$$
 kde $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ a $c \in \mathbb{R}$.

Pro $c < 0$ je $S_c = \emptyset$.

Dále pro $c = 0$ je řešením pouze $S_c = \{ \boldsymbol{\mu} \}$.

Nakonec pro $c > 0$ je
$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{U} \Lambda^{-1} \mathbf{U}^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{y}^T \Lambda^{-1} \mathbf{y}$$
 A pro $m = 2$ tedy
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{c}$$

$$\frac{y_1^2}{\lambda_1} + \frac{y_2^2}{\lambda_2} = c,$$
 což je **rovnice elipsy** se středem (μ_1, μ_2) a směry os jsou právě vlastní vektory Σ . Nakonec délky poloos budou $\sqrt{c \lambda_i}$

Analogicky pro $m > 2$ dostaneme **elipsoid**.

Příklad 4

Matice Σ je poz. **semidef** matice symetrická matice $m \times m$.

a)

$$h(\Sigma) = r, \text{ kde } 0 < r \leq m.$$

Nahradíme \mathbf{U} za matici
$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_r \end{pmatrix}$$
 a také
$$\Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$$

b)

Sestrojíme matici $\tilde{\Sigma}$ takovou, že $\tilde{\Sigma} \tilde{\Sigma}^T = \Sigma$ jako $\tilde{\Sigma} = U_1 \Lambda_1^{-\frac{1}{2}}$, když je $h(\Sigma) = r$ a pro $h(\Sigma) = m$ jako $\tilde{\Sigma} = U \Lambda^{-\frac{1}{2}}$.

d)

“ Zde značím pseudoinverzi matice A jako A^\dagger

$\tilde{\Sigma}^\dagger = \Lambda_1^{-\frac{1}{2}} U_1^T$ a pro tuto matici bychom ukázali všechny 4 vlastnosti pseudoinverze, tj.

- $A A^\dagger A = A$
- $A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger$
- $(A^\dagger A)^T = A^\dagger A$
- $(A A^\dagger)^T = A A^\dagger$

Revision #3

Created 12 January 2023 12:00:18 by Sceptri

Updated 14 January 2023 11:31:08 by Sceptri