3. cvičení

$$ \xdef\mcal#1{\mathcal{#1}} \xdef\scal#1#2{\langle #1, #2 \rangle} \xdef\N{\mathbb N} \xdef\R{\mathbb R} \xdef\Q{\mathbb{Q}} \xdef\Z{\mathbb{Z}} \xdef\D{\mathbb{D}} \xdef\bm#1{\boldsymbol{#1}} \xdef\vv#1{\mathbf{#1}} \xdef\vvp#1{\pmb{#1}} \xdef\floor#1{\lfloor #1 \rfloor} \xdef\ceil#1{\lceil #1 \rceil} \xdef\grad#1{\mathrm{grad} , #1} \xdef\ve{\varepsilon} $$

Příklad 1

Máme symetrickou, pozitivně definitní matici $m \times m$ značenou Σ.

a)

Poz. def $\iff$ všechna vlastní čísla jsou kladná $\implies$ $\det(\lambda_1 \dots \lambda_m) > 0$ $\implies$ inverze bude existovat $\implies h(\Sigma) = m$

b)

Matice Σ je *samoadjungovaný operátor* Inverzi sestrojíme pomocí spektrálního rozkladu. $$ \Sigma = U \Lambda U^T, $$ kde U je tvořená vlastními vektory a je ortogonální ($U \cdot U^T = I$) a Λ je diagonální matice vlastních čísel.

Pak inverze je $$ \Sigma^{-1} = U \Lambda^{-1} U^T $$

A jako ověření $$ \Sigma \Sigma^{-1} = U \Lambda U^T U \Lambda^{-1} U^T = I $$

c)

Ze spektrálního rozkladu je jistě matice Σ^{-1} pozitivně definitní. Nechť $\vv x \neq 0$ libovolné, pak $$ \vv x^T \Sigma^{-1} \vv x = \vv x^T U \Lambda^{-1} U^T \vv x = \vv x^T U \Lambda^{-\frac 1 2} \Lambda^{-\frac 1 2} U^T \vv x, $$ kde $\Lambda^{-\frac 1 2}$ je matice s převrácenými hodnotami odmocnin vlastních čísel matice Σ na diagonále a tedy $$ \underbrace{\vv x^T U \Lambda^{-\frac 1 2}}*{\vv y} \underbrace{\Lambda^{-\frac 1 2} U^T \vv x}*{\vv y^T} = \vert \vert \vv y \vert \vert^2 > 0 $$

d)

Mějme množinu S_c takovou, že $$ S_c = {\vv x; ; (\vv x - \vv \mu)^T \Sigma^{-1} (\vv x- \vv \mu) = c }, $$ kde $\vv \mu \in \R^m$ a $c \in \R$.

Pro $c < 0$ je $S_c \equiv \emptyset$.

Dále pro $c = 0$ je řešením pouze $S_c = {\vv \mu}$.

Nakonce pro $c > 0$ je $$ \underbrace{(\vv x - \vv \mu)^T U}_{\vv y} \Lambda^{-1} U^T (\vv x - \vv \mu) = \vv y^T \Lambda^{-1} \vv y $$ A pro $m = 2$ tedy $$ (y_1 ; y_2) \begin{pmatrix} \frac 1 {\lambda_1} & 0 \ 0 & \frac 1 {\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \ y_2 \end{pmatrix} = c $$ $$ \frac {y_1^2} {\lambda_1} + \frac{y_2^2} {\lambda_2} = c, $$ což je **rovnice elipsy** se středem (μ_1, μ_2) a směry os jsou právě vlastní vektory Σ. Nakonec délky poloos budou $\sqrt{c \lambda_i}$
Image not found or type unknown
77921418b8dee14fd3706b04914d2aff.png

Analogicky pro $m > 2$ dostaneme **elipsoid**.

Příklad 4

Matice Σ je poz. **semi**def matice symetrická matice $m \times m$.

a)

$$ h(\Sigma) = r, $$ kde $0 < r \leq m$.

Nahradíme U za matici $$ U_1 = \begin{pmatrix} \vv u_1 & \vert & \vv u_2 & \vert & \dots & \vert & \vv u_r \end{pmatrix} $$ a také $$ \Lambda_1 = \mathrm{diag} (\lambda_1, \dots, \lambda_r) $$

b)

Sestrojme matici $\tilde{\Sigma}$ takovou, že $\tilde{\Sigma} \tilde{\Sigma}^T = \Sigma$ jako $$ \tilde{\Sigma} = U_1 \Lambda_1^{\frac 1 2}, $$ když je $h(\Sigma) = r$ a pro $h(\Sigma) = m$ jako $\tilde{\Sigma} = U \Lambda^{\frac 1 2}$.

d)

> Zde značím pseudoinverzi matice A jako $A^\dagger$

$\tilde{\Sigma}^\dagger = \Lambda_1^{- \frac 1 2} U_1^T$ a pro tuto matici bychom ukázali všechny 4 vlastnosti pseudoinverze, tj.

- $A A^\dagger A = A$
- $A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger$
- $(A^\dagger A)^T = A^\dagger A$
- $(A A^\dagger)^T = A A^\dagger$

Revision #3
Created 12 January 2023 12:00:18 by Sceptri
Updated 14 January 2023 11:31:08 by Sceptri