

10. cvičení

$\$ \xdef\mcal{\mathcal} \xdef\scal{\mathbb} \xdef\N{\mathbb N} \xdef\R{\mathbb R} \xdef\Q{\mathbb Q} \xdef\Z{\mathbb Z} \xdef\D{\mathbb D} \xdef\bm{\boldsymbol} \xdef\vv{\mathbf} \xdef\vvp{\pmb} \xdef\floor{\lfloor} \xdef\ceil{\lceil} \xdef\grad{\mathrm grad} \xdef\ve{\mathrm v} \xdef\im{\mathrm im} \xdef\tr{\mathrm tr} \xdef\norm{\left\|} \xdef\ex{\mathrm E} \xdef\mtrx{\begin{pmatrix}} \end{pmatrix} \$$

Scheffeho věta $P\left(\|\mathbf{b}^T(A\hat{\beta} - A\beta)\|^2 \leq m F_{1-\alpha}(m, n-p)\right) \geq 1-\alpha$ $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, je-li matice A typu $m \times p$ plně hodnosti.

Příklad $Y_i = \beta_0 + \beta_1 \text{Height}_i + \beta_2 \text{Sex}_i + \beta_3 \text{Height}_i \cdot \text{Sex}_i + \epsilon_i$, $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ a chceme zkonstruovat 95% PS pro chlapce a dívky

1) Napíšeme tvar reg. křivky

- d: $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$
- ch: $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_2 + (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_3)x$

2) Zvolíme vhodný tvar \mathbf{b} a A :

- d: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, pak $\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix}^A \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \hat{\beta}_4 \end{pmatrix}}$
- ch: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$, pak $\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix}^A \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \hat{\beta}_4 \end{pmatrix}}$

Nejprve počítejme pro dívky, Označme $\mathbf{b}^T A = \mathbf{x}^T = (1, x, 0, 0)$ **3)** Odvodíme tvar pásu spolehlivosti (PS) $P\left(\|\mathbf{x}^T \hat{\beta} - \underbrace{\mathbf{x}^T \beta}_y\|^2 \leq 2 F_{1-\alpha}(2, n-4) \sigma^2 \mathbf{x}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}\right) = 1-\alpha$ kde y je náhodná proměnná. Upravujeme

$P\left(\|\mathbf{x}^T \hat{\beta} - y\| \leq \sqrt{2 F_{1-\alpha}(2, n-4) \sigma^2 \mathbf{x}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}}\right) = 1-\alpha$

- pro $\mathbf{x}^T \hat{\beta} - y > 0$ dostáváme **dolní hranici** $P(y \geq \mathbf{x}^T \hat{\beta} - \sqrt{2 F_{1-\alpha}(2, n-4) \sigma^2 \mathbf{x}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}})$
- nebo pro $\mathbf{x}^T \hat{\beta} - y < 0$ dostáváme **horní hranici** $P(y \leq \mathbf{x}^T \hat{\beta} + \sqrt{2 F_{1-\alpha}(2, n-4) \sigma^2 \mathbf{x}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}})$

$$\backslash\mathrm{right}) = 1 - \backslash\mathrm{alpha} \$\$$$

Revision #2

Created 12 January 2023 12:12:00 by Sceptri

Updated 12 January 2023 12:57:01 by Sceptri